BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch

der

höhern Analysis,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,
an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Erster Theil,
Differenzialrechnung enthaltend.

Mit vielen erläuternden und Uebungs-Beyspielen.

Berlin, 1829.

Bei T. H. Riemann,
Schloßfreiheit Nr. 9.

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Dritter Theil,

Differenzialrechnung enthaltend.

Mit vielen erläuternden und Uebungs-Beyspielen.

Berlin, 1829.

Bei T. H. Riemann,

Schloßfreiheit Nr. 9.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Es scheint so ziemlich gewiß zu seyn, daß Leibnitz und Newton fast zu gleicher Zeit den Grund zu den Rechnungen gelegt haben, welche uns heutiges Tages in ihrer weitern Ausbildung gewöhnlich unter dem Namen der Differenzial- und Integral-Rechnung vorgetragen werden. Bei genauerer Betrachtung zeigt es sich jedoch, daß Leibnitz und Newton diese Rechnungen selber nur unter dem Gewande der Anwendungen auf Kurvenlehre und auf Mechanik gegeben, daß spätere Mathematiker, vorzüglich der große Euler von diesen Anwendungen den Kalkul selbst zu abstrahiren versucht haben, daß es endlich dem, auf den Schultern eines Euler stehenden und deshalb weiter um sich sehenden Lagrange gelungen ist, diesen abstrahirten Kalkul in der einfachsten und elementarsten Gestalt (unter dem Namen der Funktionen-Theo-

rie) herzustellen, der sich dann in den neuesten Zeiten noch einmal in der beliebt gewordenen d'Alembert'schen (übrigens in ihrer ursprünglichen Gestalt dem Newton zuzuschreibenden) „Methode der Grenzen" (Methode der ersten und letzten Verhältnisse), wenn auch nur unvollkommen, abspiegelt.

Alle verschiedenen Ansichten eines und desselben wissenschaftlichen Gegenstandes, sind eben so viele Formen, welche das Wesen der Sache gemeinschaftlich in sich fassen, die aber dem Wesen selbst mehr oder minder fremdartig, oder mehr oder minder anpassend seyn können. Dem Einen gefällt in der Leibnitz'schen Differenzialrechnung die Kürze und die daraus hervorgehende Bequemlichkeit in manchen Anwendungen; dem Andern die größere Anschaulichkeit der Begriffe in der Lagrange'schen Funktionentheorie; ein Dritter sucht in der Methode der Grenzen einen Mittelweg, der beide Zwecke vereinigen soll; einem Vierten genügt wiederum keine dieser Formen und er sieht sich mit Sehnsucht nach einer neuen, seiner Individualität mehr zusagenden um; einem Fünften endlich ist jede dieser Formen genehm, weil er in jeder das, allen gemeinschaftliche, und in ihnen selber eben so viele Wege erblickt, zu dem Heiligthume, zu der innern geistigen Anschauung, die eben durch Vielseitigkeit in der Form gefördert wird, zu gelangen.

Dem Einen erscheint die krumme Linie als stetig krumm, d. h. als qualitativ verschieden von der Geraden; der Andere denkt sich solche als eine gebrochene Linie von

unendlich vielen, unendlich kleinen Geraden zusammengesetzt; und der Letztere nähert sich dem Ersteren immer mehr und ohne Ende, je mehr er sich Ecken in seiner gebrochenen Linie denkt; und hält er zuletzt nur das fest, was unabhängig von der Anzahl der Ecken, für jede größere Zahl der Ecken immer noch wahr seyn muß, so fällt er in seinen Resultaten mit denen des Erstern zusammen. — Dem Einen erscheint die Materie als stetig, durch einen Gegensatz von Urkräften bedingt, unendlich theilbar; dem Andern dagegen als ein Aggregat von untheilbaren Atomen, starr und leblos durch höhere schaffende Hand nach ihrer Willkühr zusammengereihet. Denkt sich aber der Letztere seine Atome immer kleiner und kleiner und die Zahl derselben immer größer und größer, so nähert er sich der Ansicht des Erstern immer mehr und mehr, und in den Resultaten sieht man beide freundschaftlich Hand in Hand gehen, sobald der Letztere die Vorsicht gebraucht hat, nur solche Resultate hinzustellen, welche für jede beliebige Zahl der Atome und für jede beliebige Kleinheit derselben, immer dieselben bleiben müssen. — Dem Einen erscheint die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers als stetig sich ändernd, die Bewegung als stetig veränderlich; der Andere denkt sich dieselbe Bewegung als ein Aggregat einzelner gleichförmiger (konstanter) Bewegungen, deren jede nur eine unendlich kleine Zeit hindurch dauert. Beide kommen in ihren Resultaten genau überein, sobald der Letztere die Zeit seiner konstanten Bewegungen immer kleiner und kleiner und zuletzt im Moment des Verschwindens sich denkt.

Der Verfasser möchte durch das eben Gesagte zur Toleranz mahnen, und glaubt, daß wahre Wissenschaftlichkeit aufhöre, sobald alles über einen Leisten geschlagen werden sollte. Wenn wir zuweilen weiter sehen, als solche, die ein oder einige Jahrhunderte vor uns gelebt haben, so verdienen Letztere desto mehr unsre Bewunderung, wenn sie trotz dieses Nachtheiles uns Bahnen gebrochen haben, auf denen wir jetzt sicher und bequem einhergehen, nicht die Schwierigkeiten ahnend, welche die umgeben mußten, die zuerst Hand an's Werk legten. *)

---

*) In der zweiten Ausgabe der Enzyklopädie des Hrn. Hegel lesen wir p. 305. noch immer folgendes: „Nach der bekannten Newton'schen Theorie besteht das weiße, d. i. farblose Licht, aus „fünf oder aus sieben Farben; — denn genau weiß dies die Theorie selbst nicht. — Ueber die Barbarei vor's erste der Vorstellung, „daß auch bei'm Lichte nach der schlechtesten Reflexionsform, der Zusammensetzung, gegriffen worden, und das Helle hier sogar aus „sieben Dunkelheiten bestehen soll, wie man das klare Wasser aus „sieben Erdtheilen bestehen lassen könnte, kann man sich nicht stark „genug ausdrücken;

„So wie über die Ungeschicklichkeit und Unrichtigkeit „des Newton'schen Beobachtens und Experimentirens, nicht weniger „über die Fadheit desselben, ja selbst, wie Göthe gezeigt hat, über „dessen Unredlichkeit; —

„Alsdann über die gleich schlechte Beschaffenheit des Schließens, „Folgerns und Beweisens aus jenen unreinen empirischen „Daten; —

„Hierauf endlich insbesondere über die Gedankenlosigkeit, mit der „eine Menge der unmittelbaren Folgerungen jener Theorie (z. B. die „Unmöglichkeit achromatischer Fernröhre) aufgegeben worden und doch „die Theorie selbst behauptet wird —

Unsre Mathematik ist nicht mehr die, wie solche vor 2000 Jahren war, ja nicht mehr die, wie sie vor einem einzigen Jahrhundert gewesen ist. Freiere, geistigere An-

———

„Zuletzt aber über die Blindheit des Vorurtheils, daß diese „Theorie auf etwas Mathematischem beruhe, und als ob die zum „Theil selbst falschen und einseitigen Messungen, so wie die in die „Folgerungen hineingebrachten, quantitativen Bestimmungen irgend „einen Grund für die Theorie und die Natur der Sache selbst abgä- „ben, ja selbst nur den Namen von Mathematik verdienen.

„Ein Hauptgrund, warum die, eben so klare als gründliche und „gelehrte, Göthe'sche Beleuchtung dieser Finsterniß im Lichte, nicht „eine wirksamere Aufnahme erlangt hat, ist ohne Zweifel dieser, weil „die Gedankenlosigkeit und die Einfältigkeit, die man eingestehen „sollte, gar zu groß ist. — Statt daß sich diese ungereimten Vor- „stellungen vermindert hätten, sind sie in den neuesten Zeiten auf die „Malus'schen Entdeckungen, noch durch die Polarisation des „Lichts, und gar durch die Viereckigkeit der Sonnenstrahlen, durch „eine links rotirende Bewegung rother und eine rechts roti- „rende blauer Lichtkügelchen, durch die wieder aufgenommenen New- „ton'schen Fits, die accès de facile transmission und accès de „facile réflexion und weiteren metaphysischen Gallimathias vermehrt „worden. — Ein Theil dieser Vorstellungen entsprang auch hier aus „der Anwendung von Differenzialformeln auf Farbenerscheinungen, „indem die guten Bedeutungen, welche Glieder dieser Formeln in der „Mechanik haben, unstatthafter Weise auf Bestimmungen eines ganz „andern Feldes übergetragen worden sind.“

So weit die Enzyklopädie. Es sey dem Vrf. erlaubt, hier vorläufig einige Worte zur Vertheidigung des in demselben Werke noch oft, hier aber besonders hart angegriffenen Erfinder der Gravitationstheorie (d. h. der mécanique céleste), der Differenzialrechnung, und so vieler anderer vor ihm nie gekannter Wahrheiten, in aller Bescheidenheit und mit aller Achtung gegen Herrn Hegel, als Ansicht gegen Ansicht, hier niederzulegen.

Der Mensch ist entweder im Besitze der Erkenntniß des Urquells aller Wahrheit (und dahin scheint die Metaphysik zu streben), oder er ist bloß im Besitze einer größern oder geringern Reihe von Er-

sichten haben die Stelle einer oft engherzigen Einseitigkeit eingenommen; freiere, geistigere Ansichten erheben noch täglich ihr Haupt und treten an die Stelle eines oft zu sehr

---

scheinungen, aus denen nun der Verstand das, vielen oder allen gemeine zu abstrahiren versucht, um auf diese Weise der Natur und dem schaffenden und erhaltenden Wesen in ihr, näher zu kommen. Nirgends geht nun aus Newton's Schriften hervor, daß er Metaphysiker seyn wolle, sondern überall hat er sich nur als Physiker gezeigt. Von diesem Standpunkte aus müssen wir daher seine Leistungen beurtheilen. Die schwächste darunter ist vielleicht seine Farbenlehre; aber dennoch muß sie für den Physiker, nach gehöriger Sichtung, immer noch größern Werth haben, als die (offenbar geistigeren Ursprung verrathende) Göthe'sche, weil letztere dem Physiker zur Zeit noch durchaus keinen festen Haltpunkt gibt, und namentlich noch bei weitem weniger Erscheinungen wirklich erklärt, als dies die (mit Recht angefochtene) Newton'sche Theorie bei alle dem thut. Die Eintheilung in 5 oder 7 Hauptfarben ist als ein (von Newton versuchtes) Hilfsmittel anzusehen, ähnlich allen denen, deren man sich bedient, um etwas stetiges durch (allemal willkührliche) Festsetzung von Stationen in ihm, einer bequemern Uebersicht zu unterwerfen. So theilen wir den (stetigen) Ton in sieben Haupttöne und ihre Unterabtheilungen; eine Eintheilung, die nirgend in der Natur existirt. So zählen wir nach Potenzen von zehn, während die Reihe der Zahlen von der Eins bis in's Unendliche fort, nirgends solche Grenzen anerkennt, sondern nur duldet. So in allen Fällen, wo der Verstand etwas vernünftig gegebenes sich zur bequemern Uebersicht zurecht legen will. Dies ist jedoch noch keine Metaphysik, und die Metaphysik scheint deshalb auch kein Recht zu haben, dagegen zu eifern. — Wie zweckmäßig aber die Einführung von Stationen ist, sobald solches systematisch und konsequent geschieht, zeigt gerade das Zahlensystem. Die kenntnißreichsten Römer und Griechen, welche diese Stationen nicht systematisch oder nicht konsequent genug bildeten, stehen unsern jetzigen gemeinsten Rechenschülern im gemeinen Rechnen meistens noch nach.

Besonders aber ist der Geist der Differenzialrechnung nicht erfaßt, wenn das Mißlingen der Newton'schen Bestrebungen der Anwendung

materiellen Auffassens. Allgemeinere, umfassendere Untersuchungen sind nothwendig geworden, wo früher mehr spezielle Betrachtungen ausgereicht haben. — Die Natur des

---

jener zugeschrieben wird. Schreiber dieses wünscht, daß die Göthe-sche Ansicht haltbarer seyn möchte, weil bei ihr die Differenzialrechnung in ihrem echten und wahren Geiste Dienste thun könnte; denn die Differenzialrechnung ist gerade (ihrem wahren Geiste nach) die Wissenschaft des Stetigen und fügt sich nur sehr gezwungener Weise in jene willkührlichen Stationen, ja geht in die Differenzenrechnung über, sobald das Stetige in das Diskrete, d. h. sobald die künstlichen Stationen in vernünftige (im Sinne der Enzyklopädie) übergehen, wie in hinlänglich vielen Beyspielen der höhern Analysis oder vielmehr der höhern Physik nachgewiesen werden kann.

Aus eben den Gründen muß dem Physiker die Gravitationstheorie, wie solche in der Mechanik des Himmels ausgebildet ist, wichtiger seyn, als die bloßen Kepler'schen Gesetze, die Kepler auf dem Wege eines 15jährigen Probirens und Vergleichens seiner, nach und nach immer abgeänderten Hypothesen mit einer großen Menge von Beobachtungen seines Lehrers Tycho de Brahe aufgefunden hat; (und daß in der Natur nichts zufällig, nichts gesetzlos sey, konnte einem beobachtenden Geiste nie entgehen); weil diese Gravitationstheorie nicht bloß die Kepler'schen Gesetze, das dritte sogar mit einer, sobald man nicht einseitig seyn, sondern die wirkliche, folglich vernünftige (im Sinne der Enzyklopädie) Bewegung der Weltkörper verfolgen will, nothwendigen Verbesserung liefert, sondern noch so vieles darüber, und namentlich mehreres, was erst mittelst der bessern Instrumente in der neueren Zeit in die Sinne gefallen ist, so daß jetzt vorzüglich erst die bloßen Kepler'schen Gesetze (nämlich das dritte) anfangen würden mit der Erfahrung hie und da in Kollision zu kommen. — Nicht daß der Vfr. Kepler's (seines Landsmannes) Ruhm verkennen wollte, denn er erkennt gerade den großen Mann in der beharrlichen und muthigen Ausdauer; sondern nur, weil man selbst seinen Feinden, um so mehr also seinen Wohlthätern, wozu er den Newton zu zählen sich ge-

menschlichen Geistes ist jedoch dieselbe geblieben; die Konsequenz des Euklides auf seinem kleinen Gebiete, durch welche seine Geometrie seit 2000 Jahren immer gleichen

---

zwungen sieht, Gerechtigkeit wiederfahren lassen muß, sind hier diese Bemerkungen hinzugefügt worden. Die Gravitationstheorie wird, in ihrem analytischen Abstraktum, wie solches in der Mechanik des Himmels hingestellt sich findet, so lange feststehen als die Welt selbst, wenn auch folgenve Jahrhunderte oder Jahrtausende statt der Attraktion andere, höhere Ursachen setzen dürften, in denen nicht bloß diese allgemeine Schwere (und was aus ihr hervorgeht), sondern auch die Rotationen und so manches bis jetzt noch unbefriedigend erklärte enthalten seyn dürften.

Der Vfr. hat übrigens bey dem Studium mehrer metaphysischen Schriften auf's neue die auffallende Bemerkung gemacht, daß in den meisten derselben fast nichts leichter und oberflächlicher behandelt wird, als die Mathematik und Physik. Soll er seine Ansicht offen mittheilen, so muß er sagen, daß diese Bestrebungen ihm so vorgekommen sind, wie wenn der Maurer, um vorgefundene Materialien (ganze Steine, Brocken, wohl auch ungeschlachte rohe Massen, u. dgl.) zu einem Fundament zu vereinigen, solche wie er sie gerade vorfindet, ohne Sichtung und ohne Auswahl, neben einander hinwirft, um zuletzt einen dünnen, wässerigen Kalkguß darüber zu machen, der dies an sich unzusammenhängende in eine feste Einheit bringen soll. Leichte Gebäude kann man allerdings darauf stellen, und für eine kurze Dauer nur berechnete; aber ein solider, der Zeit trotzender Bau, wird nimmer darauf gegründet werden können. — Da der Vfr. sich vorgenommen hat, sobald andere Arbeiten es ihm erlauben werden, (in einer eigenen kleinen Abhandlung) sich näher und bestimmter und mit Gründen belegt darüber zu erklären, so erlaubt er sich hier nur noch ein zwar sehr triviales, aber doch vorläufig passendes Beyspiel anzuführen. — In allen diesen Schriften nämlich, wo die arithmetischen Operationen erörtert werden, zeigen sich immer, obgleich a priori konstruirt, nur 6 Operationen (d. h. 6 lose Brocken, die man in den mathematischen Schriften vorgefunden hat). Warum aber nicht neun oder doch sieben Operationen?? — — Wenn wir auch zugeben

Werth behalten hat, muß daher auf das ganze, große, weit umfassende Feld der jetzigen gesammten Mathematik ausgedehnt werden, d. h. also auf die Analysis. — Dies

---

wollen, daß jedes einfach gesetzte nur einen einfachen Gegensatz hat, so ist doch zu augenfällig, daß jede Verbindung zweier Dinge allemal einen doppelten Gegensatz (der dann ein Gegensatz in triplo werden kann) nach sich ziehen müsse, weil man von dem Verbundenen zu jedem der beyden Elemente zurückkehren kann und, in der Idee, zurückkehren muß. So wie man daher 3 direkte Operationen (Addiren, Multipliziren und Potenziren) zuläßt, so muß man, in der Idee, neun arithmetische Operationen zulassen, wenn auch nachher vermöge besonderer Modifikationen, die in dem verschiedenen Seyn der 3 direkten Operationen ihren Grund haben, die beyden dem Addiren entgegengesetzten Operationen faktisch (oder vielmehr in der äußern Erscheinung) in eine einzige zusammenfallen, und für die beyden der Multiplikation gegenüberstehenden Operationen dasselbe statt findet, während die beyden dem Potenziren entgegengesetzten Operationen (das Radiziren und das Logarithmiren) immer getrennt und verschieden von einander bleiben in jeder Beziehung, so daß in Summa sieben, selbst in der äußern Erscheinung wesentlich verschiedene Operationen übrig bleiben, wie der Vfr. dieses bereits vor 13 Jahren in seiner „Elementar-Zahlenlehre" zum ersten Male, später aber bei gegebener Gelegenheit wiederholt und zur Genüge nachgewiesen hat.

Je mehr aber der Vfr. die Wichtigkeit und die Nothwendigkeit einer Metaphysik anerkennt (wenn er auch überzeugt ist, daß der Mensch troß aller Bemühungen aller Jahrtausende immer auf's neue das Bedürfniß zu einer befriedigerenden in sich vorgefunden hat und in sich vorfinden wird, sobald er überhaupt zum Bewußtseyn seiner geistigen Bedürfnisse gelangt ist), desto mehr hofft er, daß eine Gegenstellung anderer, ebenfalls aus vieljährigen redlichen Bestrebungen hervorgegangenen Ansichten, von Seiten der ernstlich nach Wahrheit Suchenden wenigstens mit der Duldsamkeit aufgenommen werden möge, mit welcher der Vfr. sie theils niedergelegt hat, theils niederlegt, theils noch niederlegen wird.

ist die Aufgabe, welche sich der Vfr. gesetzt hat, als Lehrer; dies der Standpunkt, aus welchem er auch das gegenwärtige „Lehrbuch der höhern Analysis", als Fortsetzung seines „Versuches eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik" beurtheilt sehen möchte.

Weil aber, je umfassender nach und nach das ganze Gebiet der Mathematik wird, desto sorgfältiger alles möglichst zusammengedrängt, massenweise gegeben werden muß, und weil endlich, der wichtigen Anwendungen auf höhere Physik wegen, doch wiederum keine Ansicht vernachlässigt werden darf, welche diese Anwendungen erleichtert und abermals massenweise erlaubt, so wird der verständige Leser die Schwierigkeiten nicht verkennen, welche hier zu überwinden gesucht werden mußten, und danach den Maaßstab seiner Beurtheilung anlegen.

In den Citaten bedeutet (E.) allemal die, diesem gegegenwärtigen 1sten Theile der höhern Analysis (welches der 3te im System ist) vorangegebene Einleitung; die einzelnen Theile sind unter der Nummer citirt, die sie im ganzen System einnehmen, also daß der gegenwärtige als der 3te citirt werden wird (in den folgenden Theilen). Die Citate der beiden ersten Theile (niedere Analysis enthaltend) beziehen sich allemal auf die zweite Ausgabe derselben, welche eine Umänderung in den Nummern der Paragraphen erlitten hat. Da endlich die beiden ersten Theile des ganzen Systems in dieser zweiten Auflage 11 Bogen mehr erhalten haben, als solche kontraktmäßig haben sollten, so mußte dieser dritte Theil eher etwas weniger bo-

genreich werden, als daß er wiederum die gesetzte Zahl von 24 Bogen übersteigen durfte; und deshalb können auch die versprochenen Integraltafeln nur erst dem nächst folgenden Theile beigegeben werden, welcher sich jedoch bereits unter der Presse befindet, so daß der Druck spätestens im Dezember dieses Jahres beendigt seyn wird. Dieser nächste Theil enthält besonders viele Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung, und ist vielleicht deshalb vorzüglich dazu geeignet, das Wesen dieser Rechnungen immer deutlicher und bestimmter hervortreten zu lassen.

Welche günstige Aufnahme aber auch das gegenwärtige Lehrbuch der höhern Analysis finden dürfte, so sind in den Augen des Vfrs. doch immer die ersten beyden Theile dieses „Systems" (niedere Analysis enthaltend) die wichtigsten, weil sie den Geist bezeichnen, in welchem die ganze Mathematik hier aufgefaßt wird, so daß durch sie die Nothwendigkeit der Art des Fortschreitens in den übrigen Theilen bedingt ist; — weil sie eine große Menge neuer Wahrheiten enthalten, besonders eine bisher noch nie gekannte vollständige, alle möglichen, im höhern Kalkul vorkommenden Fälle, umfassende Theorie der Potenzen und der Logarithmen; — weil sie den nothwendigen Zusammenhang nachweisen, zwischen diesen eben genannten Begriffen und den allgemeinen Begriffen der Sinus nnd Kosinus und derjenigen Funktionen, die Bogen genannt werden (welche allgemeine Begriffe der Geometrie völlig fremd sind, und nur in speziellen Fällen in der Geometrie Anwendung finden, und dann jene Elementar-

Sinus, Elementar-Kosinus und Elementar-Bogen geben, wie sie gewöhnlich in den Elementen aus dem Kreise entwickelt werden); — weil sie in der Aggregatentheorie*) (und überhaupt in der Abtheilung, welche man oft unter dem Namen der kombinatorischen Analysis gibt) die Mittel nachweisen, ohne welche späterhin verwickeltere Untersuchungen, besonders über Reihen und über allgemeine Fortschreitungsgesetze nur mit großer Mühe und mit bedeutend größerem Kraftaufwand durchgeführt werden können; — endlich weil in der dort festgestellten Ansicht die Quelle der neuen Wahrheiten zu suchen ist, welche sich in dem gegenwärtigen Theile und in den folgenden Theilen der höhern Analysis, hie und da zerstreut vorfinden dürften. — Aus diesem Grunde ist die diesem 3ten Theile voranstehende allgemeine Einleitung beigegeben worden.

Möchte es doch dem Vfr. immer mehr gelingen, diejenigen, welche sich dem Studium der Mathematik widmen, darauf aufmerksam zu machen, daß die Darlegung praktischer Methoden oder Regeln nicht der alleinige, ja nur ein Nebenzweck des mathematischen Studiums seyn kann, daß man im Gegentheil näher an die Quelle dieser Erkenntnisse vorzudringen suchen müsse, daß aber letztere nur in

---

*) Diese Aggregatentheorie ist nicht Erfindung des Vfrs., sondern die des Professor Rothe; der Vfr. hat sie aber gepflegt wie sein eigenes Kind, und dazu beyzutragen gesucht, ihre Verbreitung zu befördern (dadurch daß er sich derselben in seinen Vorträgen und in seinen Schriften, wo solches wichtig wird, ohne Ausnahme bedient), weil er zeitig genug ihre Wichtigkeit erkannt hat.

dem (subjektiven) Zusammenfassen des Ganzen in eine sogenannte wissenschaftliche Einheit gesucht werden könne *), während der tüchtige Lehrer wiederum streben muß, diese subjektive Erkenntniß in so weit objektiv zu machen (d. h., richtiger gesagt, seine Zuhörer so anregen muß), daß sie auch in dem Zuhörer als subjektive Erkenntniß feste Wurzel fasse, und dann, ohne weitere Hülfe von außen, fortwachse und gedeihe und nach allen Seiten hin um sich greife. **)

---

*) Der binomische Lehrsatz z. B. ist eine Eigenschaft der Potenzen. Was ist aber der kürzeste, eleganteste und elementarste Beweis dieser Eigenschaft, so lange man über die Ausdehnung, den Umfang und den Inhalt des Begriffes der Potenz selbst noch völlig im Ungewissen lebt. Die höhere Analysis gebraucht Potenzen mit imaginären Exponenten. Müssen nicht solche vorher in der allgemeinen Definition der Potenz mit begriffen seyn? Müssen nicht die Eigenschaften der Potenzen (also auch der binomische Lehrsatz) auch für diese allgemeine Potenz nachgewiesen werden? — Müssen nicht diejenigen Eigenschaften, welche nur gewissen speziellen Potenzen zugehören, von denjenigen abgesondert werden, welche jeder Potenz zukommen, und welche letztere allein im allgemeinen Kalkul angewandt werden dürfen, wenn man nicht auf Widersprüche stoßen will? — Und wo wäre dieses alles (nebst so vielem Anderen) bis jetzt in dem gehörigen, nothwendigen Zusammenhange zu finden, wenn der Vfr. nicht die beiden erstern Theile dieses „Systems" sollte anführen dürfen? — Ist denn der allgemeine Beweis des binomischen Lehrsatzes etwas anderes als ein überzeugender Nachweis, daß diese Eigenschaft allen Potenzen zukomme? — Ist daher ein solcher allgemeiner Beweis überhaupt nur möglich, so lange man den Umfang und den Inhalt der allgemeinen Potenz selbst noch nicht kennt? — Am deutlichsten fällt dies bei den Fakultäten oder Faktoriellen in die Augen, von denen jedoch der Vfr. hier absichtlich nicht sprechen will, da er ihre Theorie erst in spätern Theilen dieses „Systems" näher entwickeln wird.

**) Wie dies selbst bei dem allerersten Unterrichte schon mit

Wer sich eigene Bahnen zu brechen veranlaßt sieht, sieht sich leider auch, bei aller Bescheidenheit und bei aller Achtung der Verdienste Anderer, nur zu oft dem Vorwurfe der Anmaßung ausgesetzt. Möchte jeder von diesem Fehler so frei seyn, wie sich der Vfr. frei davon fühlt; ja möchten die Herren Verleger es nicht, der Menge wegen, für nothwendig finden, daß ein Name und einige Aemter und Titel des Vfrs. als Aushängeschild dienen, und der Vfr. würde seine Schriften anonym herausgeben, weil er dann hoffen dürfte, daß keine Persönlichkeit dazwischen treten könnte, und daß die einfache Wahrheit sich desto freier und ungehinderter Platz machen dürfte. — So aber kann er nur immer wiederholt auf die Unsicherheit und Ungewißheit hinweisen, mit denen die meisten Resultate im höhern Kalkul, nach dem Zugeständnisse der größten Analysten, dastehen, wiederholt darauf aufmerksam machen, daß die Quelle aller dieser Uebel nur darin zu suchen sey, daß die Elemente nicht als Wissenschaft sondern nur als Kunstfertigkeit angesehen und getrieben werden, daß daher das Höhere in der Mathematik nur in den Elementen dieser Wissenschaft gesucht und gefunden werden müsse und könne. In dieser Beziehung dürfte noch beherzigenswerth seyn, was Prony in einem amtlichen Berichte im Jahre IV. der Republik über die Elementar-Vorlesungen des Lagrange an der polytechnischen Schule zu Paris sagt.

Erfolg versucht werden könne, hat der Vrf. in seiner „Anweisung“ Berlin 1827. zu entwickeln versucht, übrigens in seinen frühern Lehrerverhältnissen allemal praktisch ausgeführt.

Le nom de Lagrange ne rapelle à bien des lecteurs que les grandes difficultés de l'analyse, et la série des recherches profondes dont il a enrichi les sciences exactes depuis quarante ans. L'école polytechnique lui réservait une nouvelle espèce de gloire, celle d'applanir l'entrée de la carrière, dont il a reculé les limites. Qu'on n'imagine pas, que ce soit dérober en pure perte quelques momens au génie, de les consacrer au développement des premiers principes de nos connaissances. Si cette tâche paraît aisée, d'aprés la multitude de livres élémentaires dont le public est inondé *), il n'en est pas moins vrai, qu'on est encore bien loin de l'avoir remplie. Quiconque a réfléchi attentivement sur la marche de la nature dans la formation des idées, et sur les moyens de déduire des qualités sensibles les diverses aggrégations de celles qu'on appelle notions fondamentales, s'étonne des difficultés extrêmes que presente leur établissement rigoureux et exempt d'obscurité; aussi des philosophes distingués ont-ils désiré, depuis longtemps, que la composition des livres élémentaires fût enfin arrachée à la cupide médiocrité, pour passer en des mains capables d'atteindre également, et la base, et le faîte de l'édifice des sciences. Déjà quelques ouvrages, faits par des savans d'un grand mérite, ont en partie couronné leurs voeux; et l'on doit

---

*) Wie sehr paßt dies jetzt, $3\frac{1}{2}$ Dezennien später, auf Deutschland.

attendre, pour l'avenir, les plus heureux efforts de l'impulsion donnée à l'instruction publique.

Besser als es hier von Prony geschehen ist, könnte der Vfr. die Ursache der großen Klarheit und Deutlichkeit nicht angeben, welche den Leser in den scharfsinnigsten und abstraktesten Untersuchungen des Lagrange auf eine seltene Art zu gleicher Zeit belehren und ergötzen, während wir in denjenigen Schriften, deren Verfassern offenbar eine gründlichere und gediegenere Kenntniß der Elemente abgeht, nur zu oft Dunkelheit und Verwirrung antreffen, welche letztere übrigens zuweilen noch das Glück haben, von der unwissenden oder doch bequemen und unachtsamen Menge, eine längere oder kürzere Zeit hindurch, als Zeichen eines mit mehr als gewöhnlichen Verstandeskräften begabten Genies angestaunt zu werden. Der Ruf solcher Schriftsteller schwindet jedoch schnell, meist noch eher als ihr Leben dahin, während der eines Euler und Lagrange z. B. bleibend seyn wird.

Wenn schließlich der Vfr. hie und da einige neue Zeichen einführt, so ist es nur sehr sparsam geschehen und nur da, wo die vorhandenen, strenger abgesonderten Begriffe, auch in den Versinnlichungsmitteln diese Absonderung unumgänglich erforderten. Wie manche der gebräuchlichen Zeichen den Anfänger verwirren müssen, mag folgendes Beyspiel statt aller nachweisen. Ist nämlich p die Länge einer geraden Linie, deren einer Endpunkt fest ist, so daß

dessen Koordinatenwerthe a und b konstant sind (auf senkrechte, mit p in derselben Ebene liegende Axen bezogen), deren anderer Endpunkt aber veränderlich ist, und x und y zu seinen Koordinatenwerthen hat; so ist

$$1)\quad p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

und $$2)\quad dp = \frac{dp}{dx}\cdot dx + \frac{dp}{dy}\cdot dy,$$

während $$3)\quad \frac{dp}{dx} = \frac{x-a}{p}$$

und $$4)\quad \frac{dp}{dy} = \frac{y-b}{p}$$ ist. —

Bald darauf findet man, wenn α und β die Winkel sind, welche die Linie p mit den Axen machen,

$$5)\quad Cos\,\alpha = \frac{dx}{dp}$$

und $$6)\quad Cos\,\beta = \frac{dy}{dp}.$$

Wird nun nicht mancher Anfänger in Versuchung kommen und glauben daß er $\frac{dx}{dp}$, wodurch (in N. 5.) $Cos\,\alpha$ ausgedrückt ist, finden könne, wenn er die Einheit durch obiges $\frac{dp}{dx}$ (in N. 2.) dividirt, die Formel im Auge habend, nach welcher $\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}$ ist? — Würde er nicht dann $Cos\,\alpha = \frac{p}{x-a}$ finden, während in der That $Cos\,\alpha = \frac{x-a}{p}$, d. h. $Cos\,\alpha = \frac{dp}{dx}$ ist, dp im Sinne der (N. 3.) nehmend? — Ein und derselbe Kosinus ist also

einmal ausgedrückt durch $\frac{dp}{dx}$, und ein andermal durch $\frac{dx}{dp}$; und beides ist ganz richtig, wenn man nur jedesmal dem dp die rechte und jedesmal eine andere Bedeutung unterlegt. Ist es aber nicht etwas unbillig, daß man an den Anfänger solche Ansprüche macht, noch dazu an denselben, der wieder bei so vielen andern Gelegenheiten ganz wie ein unmündiges, jede eigene Kraft entbehrendes Kind behandelt worden ist und behandelt wird? — —

Berlin im Mai 1829.

Dr. M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des dritten Theils.

Allgemeine Einleitung. Sie enthält eine Uebersicht des in den beiden ersten Theilen dieses Systems Geleisteten. . . . . Pag. 1—54.

Erstes Kapitel.

Die ersten Begriffe der Ableitungsrechnung und ihr Verhältniß zur Differenzialrechnung so wie auch zur Methode der Grenzen. (§§. 1—25.) . . Pag. 57—117.

Erste Abtheilung. Die ersten Begriffe der Ableitungsrechnung. Der einfache Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz. (§§.1—14.) Pag. 57—96.

§. 1—3. Begriff der Funktion. Eintheilung derselben.

§. 4. Jede Funktion von x, ist aus den einfachsten Funktionen von x, nämlich aus $A+Bx^m$, a^x und $\log x$, und aus Konstanten, durch die 7 Operationen zusammengesetzt.

§. 5. Begriff der Ableitung und der Ableitungsrechnung.

§. 6. Die Ableitungen der einfachsten Funktionen von x gefunden.

§. 7. 1. 2.) Ueber die Mehrförmigkeit der Ableitungen. 3) Zusammengehörige Werthe von y_x und ∂y_x. 4) Ist $y_x = z_x$, so ist auch $\partial y_x = \partial z_x$; und 5) ist $y_x = 0$, so ist auch $\partial y_x = 0$.

§. 8. Allgemeine Ableitungsregel.

§. 9. I. $\partial(y_x \pm z_x) = \partial y_x \pm \partial z_x$; II. $\partial(y + z_x) = \partial z_x$; III. $\partial(A \cdot y_x) = A \cdot \partial y_x$.

§. 10. Erweiterungen dieser Ableitungsformeln.

§. 11. Begriff der höhern Ableitungen.

§. 12. Der Taylor'sche Lehrsatz.

§. 13. Der Maclaurin'sche Lehrsatz.

§. 14. Der allgemeinere Maclaurin'sche Lehrsatz.

Zweite Abtheilung. Die Differenzialrechnung in ihren ersten Begriffen und ihr Zusammenhang mit der Ableitungsrechnung. (§§. 15—25.) . . . Pag. 97 — 110.

§. 15. 16. 17. Begriff der Differenz; des Differenzenquozienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

§. 18. 19. Differenzialquotient; Differenzial; — Differenzialrechnung. Unterschied zwischen *d* und ∂.

§. 20. Allgemeine Regel für das Differenziiren.

§. 21—23. Begriff des höhern Differenzials.

§. 24. 25. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Satz bloß in Differenzialzeichen geschrieben.

Dritte Abtheilung. Von der Methode der Grenzen. . . . Pag. 111 — 117.

Nro. I. Der Differenzial-Koeffizient $\frac{dy}{dx}$ ist die Grenze des Verhältnisses der Zuwachse Δy und Δx.

Nro. II. Der Differenzial-Koeffizient ist nichts anders als die Ableitung. Die „Methode der Grenzen" ist dem Wesen nach die Ableitungsrechnung, aber in dem Gange ihrer Entwickelung (und in der Anwendung) von ihr abweichend.

Nr. III. Diese Abweichung ist nicht immer zu ihrem Vortheile.

Nr. IV — VI. Die Ableitungsrechnung gewährt dieselben Vortheile, wie die Methode der Grenzen, ohne ihre Nachtheile mit ihr zu theilen.

Zweites Kapitel.

Von den höhern Ableitungen und Parzial-Differenzialien nach mehren Veränderlichen. Systematische Ableitungs- und Differenziirungs-Methode für alle möglichen entwickelt gegebenen Funktionen. (§§. 26—57.) Pag. 118—198.

Erste Abtheilung. Von den höhern Ableitungen nach mehren Veränderlichen. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz für Funktionen von 2 und mehr Veränderlichen. (§§. 26—32.) . . Pag. 118—127.

§. 26. Höhere Ableitungen nach mehren Veränderlichen.

§. 27. §. 28. Es ist $\partial^{a,b}f_{x,y} = \partial^{b,a}f_{y,x}$; d. h. es ist einerlei, in welcher Folge die verschiedenen Ableitungen genommen werden.

§. 29. Der Taylor'sche Satz für 2 Veränderliche.

§. 30. Dasselbe für Funktionen von 3 und mehr Veränderlichen.

§. 31. Der Maclaurin'sche Satz für 2, 3 oder mehr Veränderliche.

§. 32. Der Taylor'sche Lehrsatz für 1, 2, 3 und mehr Veränderliche in einer, dem Ordnen des Zu-

wachses nach den bedeutendsten Gliedern günstigen Form.

Zweite Abtheilung. Allgemeine Lehrsätze des Ableitens. Darauf gegründete allgemeine systematische Ableitungmethode für alle entwikkelt gegebene Funktionen. (§§. 33—42.) Pag. 127 — 177.

§. 33. Unmittelbare (explizite), mittelbare (implizite), und gemischte Funktionen. — Alle bisherigen Zeichen beziehen sich auf explizite oder unmittelbare Funktionen.

§. 34. Es ist I. $\partial y_{(v)} = \partial y_x \cdot \partial x_v$.

§. 35. Es ist II. $\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v$.

§. 36. Spezielle Fälle hiervon, wo $f = Ax + By$, $f = x \cdot y$, $f = \frac{x}{y}$, $f = x^y$ ist.

§. 37. Wenn in (§. 35.) $v = x$ ist, also $\partial x_v = \partial x_x = 1$.

§. 38. Es ist III. $\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v + \partial f_z \cdot \partial z_v$.

§. 39. Wenn in (§. 38.) $v = x$, also $\partial x_v = \partial x_x = 1$ ist.

§. 40. Dasselbe, wenn f beliebig viel Veränderliche enthält.

§. 41. Von jeder entwickelt gegebenen Funktion f von v die Ableitung zu finden; 58 Beispiele darüber.

§. 42. Einige, die Praxis erleichternde Formeln.

§. 42ª. Geordnete Uebungsbeispiele des Ableitens (folglich auch des Differenziirens).

Dritte Abtheilung. Von den Parzial-Differenzialien. Allgemeine Lehrsätze. Darauf gegründetes systematisches Differenziiren aller entwickelt gegebenen Funktionen, einer oder mehrer Veränderlichen. (§. 43 — §. 57.) . . Pag. 178 — 198.

§ 43—45. 48. $df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$,

$$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz, \text{ u. s. w.}$$

§. 46. Erklärung der vollständigen und der Parzial-Differenzialien.

§. 47. Bezeichnung derselben nach Euler, nach Fontaine, ꝛc.

§. 48. Die vorhergehenden Sätze in den gewöhnlichen Zeichen.

§. 49—52. Verhältniß der Sätze der Ableitungsrechnung zu den analogen der Differenzialrechnung.

§. 53. Identität der Parzial-Differenzialquotienten mit den Ableitungen.

§. 54. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz für 2 und mehr Veränderliche in Differenzialzeichen.

§. 55. Begriff der höhern Differenzialien von $f_{x,y}$, wenn x und y von einander unabhängig sind, und Formeln dafür.

§. 56. Dasselbe in Bezug auf $f_{x,y,z,u,\cdots}$.

§. 57. Für jede solche Funktion f eines Veränderlichen x, oder zweier oder mehrer von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. ꝛc. ist allemal vollständig

$$\Delta f = df + \frac{1}{2!}\cdot d^2 f + \frac{1}{3!}\cdot d^3 f + \frac{1}{4!}\cdot d^4 f + \cdots,$$

während die Differenzialrechnung bloß

$\Delta f = df$, $\Delta(df) = d^2 f$, $\Delta(d^2 f) = d^3 f$, ꝛc. nimmt.

Drittes Kapitel.

Bestimmung der Abhängigkeit der Ableitungen von einander, wenn die Veränderlichen selbst auf eine bestimmte Weise von einander abhängen. — Anwendungen dieser Beziehungen zwischen den Ableitungen zur Auffindung der Ableitungen (und der Differenzialien) von verwickelt (durch Gleichungen) gegebenen Funktionen, so wie auch zur „Uebertragung der Unabhängigkeit.“ (§. 58 — §. 95.) . . Pag. 199 — 285.

Erste Abtheilung. Allgemeine Ableitungsformeln. Auffindung der Ableitungen der verwickelt gegebenen Funktionen. Uebertragung der Unabhängigkeit. (§. 58—80.) Pag. 199—245

§. 58. Ist f_x, für $x = x_v$ in $f_{(v)}$ oder f_v übergegangen, so hat man I. $\partial f_v = \partial f_x \cdot \partial x_v$;

II. $\partial^2 f_v = \partial^2 f_x \cdot \partial x_v^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_v$; u. s. w. f.

§. 59. Daraus ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ꝛc. in Ableitungen nach v ausgedrückt.

§. 60. Wenn hier $v = f$ ist, so daß ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ꝛc. in ∂x_f, $\partial^2 x_f$, ꝛc. ausgedrückt werden.

§. 61. Eine Funktion F von x, f, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ꝛc. in eine andere F_1 von x, f, ∂x_v, ∂f_v, $\partial^2 x_v$, $\partial^2 f_v$, ꝛc. zu verwandeln, oder in eine andere F_2 von x, f, ∂x_f, $\partial^2 x_f$, ꝛc. ꝛc.

§. 62. Ist $f = f_{x,y}$ und $x = x_v$, $y = y_v$, so hat man

I. $\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v$;

II. $\partial^2 f_{(v)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x_v^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_v \cdot \partial y_v + \partial^2 f_y \cdot \partial y_v^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_v + \partial f_y \cdot \partial^2 y_v$;

u. s. w. f.

§. 63. Wenn hier $v = x$, $\partial x_v = 1$, $\partial^2 x_v = 0$, ꝛc. wird.

§. 64. Wenn $f_{(v)}$ oder $f_{(x)}$ identisch 0 wird, so ist auch $\partial f_{(v)}$, $\partial^2 f_{(v)}$, ꝛc. oder $\partial f_{(x)}$, $\partial^2 f_{(x)}$, ꝛc. identisch $= 0$.

§. 65. Aus (§. 62.) ∂f_x, ∂f_y, $\partial^2 f_x$, ꝛc. in lauter Ableitungen von f und x und y, nach t und w ausgedrückt, $x = x_{t,w}$, $y = y_{t,w}$ gedacht.

§. 66. 67. Dasselbe in dem speziellern Falle, daß in $f_{x,y}$, bloß $x = x_{t,y}$ genommen; zuletzt auch, wenn hier wiederum f statt t gesetzt wird.

§. 68. 69. Einen Ausdruck F, der solche Ableitungen enthält, durch Substitution der eben gefundenen Werthe, in einen andern umzuformen, welcher diese erstern Ableitungen nicht mehr, sondern dafür andere enthält.

§. 70. Ist $f = f_{x,y,z}$ und $x = x_v$, $y = y_v$, $z = z_v$, so ist I. $\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v + \partial f_z \cdot \partial z_v$; II. $\partial^2 f_{(v)} = \cdots\cdots$; u. s. w. f.

§. 71. Dasselbe, wenn $v = x$ wird.

§. 72. Dasselbe, wenn $f = f_{x,y,z}$ und $z = z_{x,y}$ ist.

§. 73 — 75. Wenn $f = 0$ wird, wie dann die Ableitungen der durch solche Gleichungen verwickelt gegebenen Funktionen gefunden werden.

§. 76. Wenn in (§. 70.) $x = x_{t,w,v}$, $y = y_{t,w,v}$, $z = z_{t,w,v}$ ist, wie die Ableitungen ∂f_x, ∂f_y, ∂f_z, $\partial^2 f_x$, ꝛc. in lauter Ableitungen nach t, w, v ausgedrückt werden.

§. 77. Die speziellen Fälle wenn in $f = f_{x,y,z}$, bloß $x = x_{t,y,z}$ gesetzt; — wenn zuletzt noch $t = f$ genommen wird.

§. 78. 79. 80. Verallgemeinerung des bisherigen.

Zweite Abtheilung. Verallgemeinerung der (§. 61. §. 68. §. 69. und §. 76.) gelehrten Uebertragung der Unabhängigkeit in Ableitungs-Ausdrücken. (§. 81 — §. 87.) . Pag. 245 — 264.

Dritte Abtheilung. Die Lehren der beyden vorhergehenden Abtheilungen in der Form der Differenzialrechnung (§. 88 — §. 95.) Pag. 265 — 285.

§. 88. Vorschlag unterscheidender Zeichen $d f_x$, $d^2 f_x$, $d^3 f_x$, ꝛc. $d f_{(v)}$, $d^2 f_{(v)}$, $d^3 f_{(v)}$ ꝛc. ꝛc. für die Differenzialien im verschiedenen Sinne genommen.

§. 89. Wie die gewöhnliche Differenzialrechnung solche unterscheidet, dadurch daß sie dx bald konstant, bald veränderlich erklärt, und im Zeichen dadurch, daß sie Differenzialquotienten zu Hilfe nimmt, und wo nach (§. 88.) df_x, d^2f_x, d^3f_x ꝛc. stehen sollte, lieber $\frac{df}{dx}\cdot dx$, $\frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2$, $\frac{d^3f}{dx^3}\cdot dx^3$, ꝛc. schreibt.

§§. 90—95. Die (§§. 59—87.) in Differenzialrechnungsformen übergetragen.

Allgemeine Einleitung.

Allgemeine Einleitung.

Obgleich dieses „Lehrbuch der höhern Analysis" mit dem 3ten Theile des „Versuchs eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik" beginnt, also die Fortsetzung der beiden Theile des „Lehrbuchs der niedern Analysis" ist, so soll es doch auch ein für sich bestehendes Ganzes seyn; und deshalb mögen hier in einer eigenen Einleitung die wichtigsten der gewonnenen Resultate der beiden ersten Theile dieses Systems hingestellt werden, so wie noch einiges andere, was zur klaren Ansicht und Einsicht des hier vorzutragenden für dienlich geschienen hat. Ueber die nähere Begründung dieser hier faktisch niedergelegten Resultate, müssen natürlich die gedachten beiden ersten Theile selbst zu Rathe gezogen werden, und es kann diese Einleitung nur hie und da entfernt, und deshalb durchaus nur ungenügend, darauf hindeuten.

1.

Die Analysis (Arithmetik, Algebra, Analysis des Endlichen, Differenzial- und Integral-Rechnung, Differenzenrechnung, Variationsrechnung 2c. 2c.), welche man passender den Kalkul nennen sollte, hat es nicht mit den Größen, sondern nur mit

dem Verhalten (den Gegensätzen und den Beziehungen) der 7 Operationen zu einander zu thun, (der 3 direkten, Addition, Multiplikation und Potenziren, und der damit nothwendig gegebenen indirekten, Subtraktion, Division, Radikation, und Logarithmation).

2.

Diese Operationen werden zunächst von der unbenannten ganzen Zahl abstrahirt, und es wird, in so ferne man vom einfachsten ausgehen muß, das Addiren und Subtrahiren zunächst betrachtet. Es werden die Gesetze hingestellt, nach welchen Summen $a+b$, und Differenzen $a-b$ sich richten müssen, wenn man es mit unbenannten ganzen Zahlen zu thun hat. Es wird die Nothwendigkeit und die Möglichkeit nachgewiesen, diese Gesetze der Addition und Subtraktion (welche allemal in der Form von Gleichungen hingestellt sind) ganz allgemein gelten zu lassen, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben bekümmern zu müssen, also unabhängig von dieser Bedeutung, demnach gültig bleibend, man mag für jeden der Buchstaben setzen, welchen andern Ausdruck man nur immer will. — Diese Gleichungen, so allgemein aufgefaßt, deuten daher nicht Einerleiheit der Quantität an, sondern Einerleiheit (Identität) der Operationen in den verschiedenen Folgen, wie jeder der beiden gleichen Ausdrücke solche ausspricht.

3.

Geht man daher ursprünglich von ganzen unbenannten Zahlen aus, so wird das allgemeine Auffassen der Summe und der Differenz (als bloße Formen $a+b$, $a-b$, durch welche vorhandene Operationen veranschaulicht werden) in diesem speziellen Falle, zu den 3 speziellen Formen der Differenz $a-b$ führen, wo nämlich $a>b$, $a=b$, $a<b$ ist. Im erstern Fall hat man selbst wieder die ganze unbenannte Zahl; im zweiten und dritten Fall hat man entweder $b-b$ oder $a-(a+c)$, wovon wir die erstere Form kürzer durch das eigene Zeichen 0 (Null) bezeich-

nen,*) während dann die letztere, nach denselben früher hingestellten Gesetzen, in 0—c übergeht, und kürzer durch —c bezeichnet wird. Dabei wird +c als die Summe 0+c vorstellend, angenommen, so daß eben deshalb wieder +c = 0+c = c ist.

Und weil, diesen Ansichten zufolge, die Zeichen 0 und +c und —c nichts anders vorstellen als Differenzen oder Summen, so folgt, daß dieselben Gesetze, nach welchen Differenzen und Summen sich richten, sogleich auf sie in Anwendung gebracht werden können und müssen, so daß weder eine eigene Lehre der 0 (Null), noch eine eigene Lehre der Formen +c und —c (welche gewöhnlich, irrthümlicher Weise, unter dem Namen der entgegengesetzten Größen im Kalkul besonders betrachtet werden) nöthig wird.

Die positive ganze Zahl, die Null und die negative ganze Zahl, werden aber bequem in den einzigen Begriff der Differenzen ganzer Zahlen vereinigt, und nachher unter diesem allgemeinern Begriff alle 3 zugleich und mit einander betrachtet, was große Einfachheit der Darstellung und zugleich auch größere Gründlichkeit gewährt.

4.

Nach diesem werden die Gegensätze zwischen der Multiplikation und der Division, so wie die Beziehungen dieser beiden letztern Operationen zu den beiden erstern herausgehoben, wiederum von der besondern Betrachtung ausgehend, daß man überall unbenannte ganze Zahlen habe. Weil aber das allgemeine Auffassen der so, aus diesem besondern Falle abstrahirten Gesetze, mit dem was (N. N. 2. u. 3.) bereits ergeben haben, im Widerspruch stehen könnte, so müssen dieselben Gesetze auch noch für den allgemeinern Fall geprüft werden, wo man es durchaus mit Diffe-

*) Diese 0 (Null) ist jedoch in der Rechenkunst noch nicht da gewesen, weil die gemeine Rechenkunst als ein Theil der Analysis (des Kalkuls) auf die hier besprochenen Gesetze erst gegründet ist, daher später folgen muß.

renzen ganzer Zahlen (der N. 3.) zu thun hat. Und ist dies geschehen, so ist wieder die Möglichkeit mit der Nothwendigkeit zugleich vorhanden, diese Gesetze ganz allgemein als Gesetze der Operationen aufzufassen, die da ganz und durchaus unabhängig sind, von dem womit operirt wird; so daß für die einzelnen Buchstaben jeder andere Ausdruck gesetzt werden kann. Auch die Gleichungen, welche diese neuen Gesetze enthalten und aussprechen, deuten daher nicht Einerleiheit der Quantität an, sondern Einerleiheit (Identität) der Operationen (in der verschiedenen Folge, wie solche in den beiden Ausdrücken zur Linken und zur Rechten des (=) Zeichens ausgesprochen ist).

Man findet aber hier den für die Folge wichtigen Satz: „daß man nie durch 0 (Null) dividiren darf, und daß „man deshalb ein allgemeines Resultat für den Fall „nicht gelten lassen darf, in welchem nachher einer „der Nenner Null geworden ist.“

5.

Geht man nun ursprünglich von den ganzen unbenannten Zahlen aus, so kommt man allemal, wie zusammengesetzt auch die Verbindung gedacht werden möge, doch immer nur zu dem Quotienten $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ zweier Differenzen ganzer Zahlen, welcher sich nachgehends in die positive ganze oder gebrochene, negative ganze oder gebrochene Zahl und in die Null auflößt.*)

---

*) Die gebrochene Zahl erscheint aber hier zum ersten Male, weil die Rechenkunst auf diese Gesetze selber erst gegründet werden, also nur später folgen kann. Die gebrochene benannte Zahl erscheint zwar später (in der Lehre der benannten Zahlen, welche allgemeine Größenlehre genannt wird) als ein Theil der ganzen Einheit; aber die gebrochene unbenannte Zahl, wie solche allgemein im Kalkul vorkommt, ist nichts weiter als eine spezielle Form des allgemeinen Quotienten $\frac{a}{b}$, für welche aber die für $\frac{a}{b}$ in den Gleichun-

Der Quotient zweier Differenzen ganzer Zahlen ist daher der allgemeinere Begriff, in welchem die sogenannten reelen Zahlen stecken.

Will man aber ausdrücken, wenn a und b solche reele Zahlen sind, daß a—b positiv wird, so sagt man „a sey größer als b" und „b sey kleiner als a".

6.

Nun wird die ganze Potenz a^b definirt, als ein Produkt von b gleichen Faktoren; — die Differenz-Potenz $a^{\alpha-\beta}$, als den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$ vorstellend, wo a^α und a^β ganze Potenzen sind, folglich Produkte gleicher Faktoren repräsentiren; — dann die absolute Wurzel $\sqrt[b]{a}$, wo a positiv ganz oder gebrochen, b aber positiv ganz ist, und welche nur eindeutig und die einzige, allemal existirende, (rationale oder irrationale) absolute Zahl vorstellt die mit b potenzirt, a wieder gibt; — hernach die reele Potenz $a^{\pm\frac{m}{n}}$, als $(\sqrt[n]{a})^{\pm m}$ vorstellend, daher nur unter der Voraussetzung, daß a positiv ist, und dann allemal eine, und nur eine einzige Bedeutung habend; — zuletzt der reele Logarithme $\overset{b}{log}\,a$, unter der Voraussetzung, daß a und b positiv sind, welcher allemal eine reele Zahl vorstellt und nur eine einzige, nämlich diejenige x, welche $b^x = a$ macht. — Und für diese speziellen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen werden die Gesetze des Verhaltens derselben zu einander, oder vielmehr die Gegensätze und das Verhalten der 3 letztern Operationen unter sich und zu den 4 erstern Operationen, abermals in Form von Gleichungen hingestellt.

---

gen ausgesprochenen allgemeinen Gesetze des Operirens gelten, so daß jede neue Gleichung, die Identität der Operationen in einer neuen Modifikation auf's neue bekundet.

Um aber überzeugt zu seyn, daß diese aus speziellen Betrachtungen abstrahirten Gesetze, auch die allgemeinen sind, daß also diese Gleichungen als Gesetze der Operationen beibehalten werden können (als Identität der Operationen aussprechend), ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben bekümmern zu dürfen, d. h. daß sie diejenigen Gesetze sind, welche bloß vom Operiren gelten und daher unabhängig von dem, womit operirt wird; — müßte man der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$, und dem Logarithmen $\overset{b}{log}\,a$ (oder a?b) Bedeutungen unterlegen können, für den Fall daß a und b beliebige reele Zahlen sind, und man müßte nachgehends noch sich überzeugen, daß dieselben vorhin gefundenen Gesetze, auch noch für diese allgemeinern Begriffe statt finden, um überzeugt zu seyn, Gesetze zu haben, die ganz allgemein und unabhängig von den speziellen Ausdrücken, mit denen operirt wird, beibehalten werden können, für die bloßen Formen a^b, $\sqrt[b]{a}$, $\overset{b}{log}\,a$, in welchen das bloße Operiren veranschaulicht wird.

Diese für ein allgemeines und sicheres Operiren mit Potenzen Wurzeln und Logarithmen nothwendige Anforderung realisirt sich aber nicht so leicht und nicht so auf einmal, so daß man vor der Hand darauf Verzicht leisten, und sich einstweilen in dem schon erworbenen Gebiete näher orientiren und festsetzen muß.

7.

Die Gleichung, welche Identität der Operationen andeutet, und deshalb mit Recht eine identische Gleichung genannt wird, ist also das erste, wovon man ausgehen kann, aber auch das einzige, um welches sich der gesammte Kalkul (Arithmetik, Algebra, höhere und niedere Analysis ꝛc. ꝛc.) herumdreht. Sie erscheint jedoch nicht immer in ihrer reinen Form, sondern oft nur unter der Voraussetzung, daß einer oder mehrere der in ihr vorkommenden Buchstaben bestimmte, oft noch unbekannte Ausdrücke repräsentiren. In dieser getrübten Form wird sie dann Bestim-

mungsgleichung genannt,*) die entweder eine algebraische (wenn noch nicht allgemeine, den Unbekannten involvirende Potenzen oder Logarithmen vorkommen), oder eine transcendente heißt. Vorläufig können natürlich nur algebraische Bestimmungsgleichungen vorkommen.

Mit den Bestimmungsgleichungen (welche nur der Form nach von den sogenannten identischen Gleichungen verschieden sind, dem Wesen nach aber nothwendig identische seyn müssen, weil es andere Gleichungen gar nicht gibt) ist zu gleicher Zeit die Aufgabe gegeben: „den Ausdruck zu finden, welchen der Unbekannte (Buchstabe) z. B. x repräsentirt in der Gleichung, „welcher also statt dieses Buchstabens x gesetzt, gedacht werden „muß, wenn die Gleichung eine Gleichung (Identität der Operationen aussprechend) seyn soll"; und mit dieser Aufgabe eröffnet sich das Gebiet der Algebra, der niedern (wenn sie sich bloß mit Auflösung der algebraischen Gleichungen beschäftigt) und der höhern (wenn sie auch transcendente Gleichungen beachtet).

8.

Bei der reinen quadratischen Gleichung

$$x^2 = a$$

ergibt sich aber sogleich, daß sie nicht allgemein gelößt werden kann, so lange nicht $\sqrt[2]{a}$ allgemeiner als bisher, wo a positiv vorausgesetzt war, aufgefaßt wird. Ja man kann, selbst wenn a positiv ist, die Gleichung nur dadurch lösen, daß man sie in

*) So ist z. B.

$$\frac{A}{B} = x + z$$

nur unter der Voraussetzung eine Gleichung, daß z den Ausdruck $\frac{A-Bx}{B}$, oder daß B den Ausdruck $\frac{A}{x+z}$, oder daß A den Ausdruck $Bx+Bz$ repräsentirt.

$x^2 - a = 0$, $x^2 - (\sqrt[2]{a})^2 = 0$, $(x - \sqrt[2]{a}) \cdot (x + \sqrt[2]{a}) = 0$ umwandelt und dann sieht, wie diese Gleichung zweimal identisch wird, nach den beiden Ausdrücken für x, welche den einen oder den andern dieser letztern beiden Faktoren zu Null machen. Aber eben deshalb sieht man sich gezwungen die Form $\sqrt[2]{a}$ im Allgemeinen als die Eigenschaft vorstellend zuzulassen, daß sie mit 2 potenzirt a gibt, so daß sie im Besonderen, wo a positiv ist, unbestimmt läßt, welcher der beiden, dieselbe Eigenschaft mit einander gemein habenden Werthe, der gerade vorgestellte ist, so daß eben deshalb $\sqrt[2]{a}$ schon im Allgemeinen als zweideutig (oder vielmehr zweiförmig d. h. die beiden Formen $+\sqrt[2]{a}$ und $-\sqrt[2]{a}$, d. h. die Summe $0+\sqrt[2]{a}$ und die Differenz $0-\sqrt[2]{a}$ vorstellend) angesehen und behandelt werden muß.

9.

Diese Verallgemeinerung der Quadratwurzel $\sqrt[2]{a}$, führt uns im Speziellen, von ganzen unbenannten Zahlen ausgehend, zu der Quadratwurzel aus einer reelen Zahl, welche sich in die reele Zahl selbst wieder auflöst (wenn a positiv) oder in eine neue, zugleich neben der reelen Zahl in ihr liegende Zahlform (wenn a negativ ist), und welche letztere man eine imaginäre Zahl nennt.

So wie die negative ganze Zahl bloß eine spezielle Form der allgemeinen Differenz, und so wie die gebrochene und überhaupt die reele Zahl nur eine besondere Form des allgemeinen Quotienten ist, so ist auch, wie hieraus hervorgeht, die imaginäre Quadratwurzel nur eine spezielle Form der allgemeinen Quadratwurzel, aber eben deshalb, wie die allgemeine, zweideutig (oder zweiförmig) und demnach mit der Vorsicht zu behandeln, welche für mehrdeutige Ausdrücke ein für allemal mitgetheilt wird.

10.

Die allgemeine Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2+ax+b=0$ wird nun möglich, und die beiden Werthe für x sind, wenn a und b ursprünglich von ganzen unbenannten Zahlen abhängen, übrigens selbst wieder als die Unbekannten in quadratischen Gleichungen gegeben seyn können, entweder reel oder doch von der Form $p+q\cdot i$, unter p und q reele Zahlen gedacht, unter i aber eine der Formen $+\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$ verstanden; welche Form, der reelen entgegenstehend, die imaginäre genannt wird, aber, wenn man $q=0$ nimmt, auch jede reele Zahl in sich schließt, und in diesem allgemeinern Sinne (wo q eben so gut 0 als auch nicht 0 seyn kann) eine allgemein-numerische Zahl genannt wird.

11.

Es wird nun nachgewiesen, daß die höhere Gleichung vom mten Grade, deren Koeffizienten von unbenannten ganzen Zahlen abhängen, übrigens selbst durch höhere Gleichungen gegeben seyn können, doch allemal m Werthe für den unbekannten x liefert, alle von der allgemein-numerischen Form $p+q\cdot i$, so daß sie (wenn $q=0$) reel, oder auch (wenn q nicht Null ist) imaginär seyn werden; also auch dann noch wahr bleibt, wenn die Koeffizienten der Gleichung selbst allgemein-numerische Zahlen, d. h. von der Form $p+q\cdot i$, sind.

12.

Und deshalb hat auch die Gleichung

$$x^m = a,$$

wenn a die Form $p+q\cdot i$ hat, also reel oder imaginär ist, allemal m Werthe für x, alle von derselben Form $p+q\cdot i$, also bald reel bald imaginär.

Da es demnach für diesen speziellen Werth von a, m verschiedene Ausdrücke gibt, welche alle die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß sie mit m potenzirt a geben, so kann man,

die $\sqrt[m]{a}$ allgemein als eine Form auffassend, welche diese Eigenschaft repräsentirt, diese allgemeine Wurzel nur als ein m deutiges (oder besser m förmiges) Zeichen ansehen, welches in jedem Falle unbestimmt läßt, welcher der m Ausdrücke, die diese Eigenschaft mit einander gemein haben, jetzt gerade vorgestellt ist.

13.

Daher für das Arbeiten mit Wurzeln die praktischen Regeln:

1) Eine und dieselbe Wurzelform $\sqrt[m]{a}$, nicht nothwendig als einen und denselben Ausdruck vorstellend anzusehen, weil sie einmal die eine, ein andermal die andere der in ihr enthaltenen speziellen Formen repräsentiren kann.

2) Für eine solche allgemeine Wurzelform $\sqrt[m]{a}$, nicht eher eine der in ihr repräsentirten speziellen Formen (einen ihrer m Werthe) zu setzen, als bis man sich erst für diesen besondern Fall besonders überzeugt hat, daß gerade dieser Werth und nicht einer der übrigen jetzt dafür gesetzt werden könne und dürfe.*)

14.

Auf diesen Begriff der allgemeinen Wurzel $\sqrt[m]{a}$, könnte nun der Begriff einer Potenz a^b gebaut werden, in welcher a schon ganz allgemein, aber $b = \pm \frac{n}{m}$ eine reele Zahl ist, weil man nur unter a^b sich $(\sqrt[m]{a})^{\pm n}$ denken dürfte, so daß die Potenz a^b selber, nämlich $a^{\pm \frac{n}{m}}$ nun m deutig würde; und man würde die Gesetze der frühern besondern Potenzen für diese, wiederum allgemeinern Potenzen als beschränkt geltend nachweisen können, so nämlich, daß man auf die Mehrdeutigkeit solcher Potenzen Rücksicht nehmen, und namentlich die hier in (N. 13.) stehenden praktischen Regeln auch für sie in Anwendung bringen müßte. —

*) Die Vernachlässigung dieser Regeln ist Ursache vieler der sogenannten paradoxen (d. h. unrichtigen) Resultate des Kalkuls.

Allein dies reicht offenbar nicht aus, um zuletzt ganz allgemeine Potenzen zu haben, und Gesetze für solche, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben bekümmern zu dürfen (d. h. Gesetze der bloßen Operationen, in allen Fällen und für alles gültig, womit auch immer operirt werden mag). Da nämlich nun die allgemein-numerischen Zahlen (von der Form $p+q\cdot i$) die allgemeinsten der bis jetzt entstandenen besondern Zahlformen sind, welche die reele Zahl nur als einen besondern Fall in sich enthalten, in einem andern besondern Fall aber nicht reel sind und imaginär genannt werden, so müssen wir nach einem Begriff der Potenz a^b hinarbeiten, für den Fall, daß nicht nur a allein, sondern auch b solche beliebige allgemein-numerische Zahlen (von der Form $p+q\cdot i$) sind.

15.

Dazu führt uns aber der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^x = a^x + x_1 \cdot a^{x-1}b + x_2 \cdot a^{x-2}b^2 + \cdots \\ + x_\alpha \cdot a^{x-\alpha}b^\alpha + \cdots\cdots,$$

unter $x_1,\ x_2,\ x_3,$ 2c. 2c.

die Ausdrücke $x,\ \frac{x(x-1)}{2},\ \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$ 2c. 2c.

verstanden; — oder

$$(a+b)^x = S[x_\alpha \cdot a^{x-\alpha} \cdot b^\alpha],$$

wenn man statt aller Glieder bloß das allgemeine Glied schreiben will, aus welchem die einzelnen Glieder hervorgehen, wenn statt α nach und nach $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ u. s. w. f. gesetzt wird.

Dieser Satz ergibt sich anfänglich für den Fall, daß x eine positive ganze Zahl ist, aus der bloßen Multiplikation der x Faktoren, wo jeder $a+b$ ist; — nachher aber, wenn die unendlichen Reihen einer nähern Betrachtung unterworfen worden sind, wird seine Gültigkeit auch für den Fall nachgewiesen, daß x eine negative ganze Zahl, oder auch für den Fall, daß $(a+b)^x$ eine reele Potenz ist (N. 6.).

Lößt man x_a d. h. $\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-a+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots a}$ durch Multiplikation der Faktoren des Zählers gehörig auf, so lassen sich die Glieder des Ausdrucks zur Rechten so ordnen, daß $(a+b)^x$ in der Form $A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+\cdots\cdot$ erscheint, unter A_0, A_1, A_2, 2c. 2c. Ausdrücke verstanden, welche von $a+b$ abhängen (für welches $a+b$, aber auch jetzt bloß c, d. h. auch bloß a gesetzt werden kann).

16.

Dies führt zu dem Gedanken, unendliche nach x fortlaufende Reihen zu finden, welche allgemeiner als die Potenz a^x sind (d. h. für jeden Werth von x Bedeutung haben), welche aber mit der Potenz die Eigenschaft gemein haben, daß, so wie

$$a^x\cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{ist,}$$

auch

$$F(x)\cdot F(y) = F(x+y) \quad \text{seyn}$$

möge, unter $F(x)$ die gedachte Reihe selbst verstanden. — Hier aber müssen wir vorher erst zeigen, wie wir überhaupt zu unendlichen Reihen kommen, und was für ihren praktischen Gebrauch zu bemerken ist.

17.

Die Betrachtung der algebraischen Gleichungen führt bereits zur Betrachtung der Ausdrücke von der Form

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots\cdot+A_m\cdot x^m,$$

(in welchen A_0, A_1, A_2, $A_3\cdots A_m$ beliebige Koeffizienten sind) und welche ganze Funktionen von x genannt werden; denn die Aufsuchung der Werthe von x, welche diese ganze Funktion zu Null machen, ist gerade das, was man die Auflösung der höhern Gleichung nennt, und erstreckt sich offenbar nur auf eine einzige Eigenschaft dieser ganzen Funktionen, während alle ihre übrigen Eigenschaften ebenfalls einer nähern Betrachtung werth seyn können.

Diese letztere wird ihnen dann auch zu Theil, und da der Grad m völlig unbestimmt bleiben und auch beliebig groß werden kann, so werden wir zuletzt veranlaßt, eine solche ganze Funktion von unendlich vielen Gliedern d. h. eine nach x fortlaufende unendliche Reihe zu betrachten. Indem wir sie der Form nach genau wie ganze Funktionen von x behandeln, ergibt sich das Operiren mit ihnen, in diesem Sinne, d. h. im Allgemeinen; aber im Speziellen können sie nur dann gebraucht werden, wenn die Summe aller ihrer Glieder eine bestimmte endliche Zahl, von der Form $p+q \cdot i$ (reel oder imaginär) wird, d. h. wenn sie konvergent sind, nicht aber wenn sie divergiren.

18.

Von den unendlichen Reihen hat man sich vorzüglich zu merken

A. wenn sie allgemein sind:

1) Sind zwei unendliche Reihen nach x einander gleich, für jedes x, so sind die Koeffizienten der einzelnen gleichnamigen Potenzen von x einander gleich; und ist die eine identisch $= 0$, so sind ihre einzelnen Koeffizienten identisch $= 0$.

2) Wird eine unendliche Reihe gesucht, welche gewisse Eigenschaften haben soll, so ist die Form der Reihe bereits gegeben, also sind nur noch die vorläufig mit A_0, A_1, A_2, A_3, 2c. 2c. bezeichneten Koeffizienten derselben so zu suchen, daß den Bedingungen der Aufgabe genügt wird; — und dies führt zur „Methode der unbestimmten Koeffizienten.“

3) Diese Methode darf aber nirgends angewandt werden, wo man nicht vorher sich schon vergewissert hat, daß eine solche Reihe, wie man sie sucht, existirt; weil die Annahme der Form, wenn sie nicht existirt, zwar einen Widerspruch involvirt, der sich irgend wo äußern muß, der aber nicht nothwendig in der Unmöglichkeit der Bestimmung der Koeffizienten sichtbar werden wird, sondern oft eben nur darin sich

zeigt, daß die so gefundene Reihe ein unrichtiges Resultat enthält.*)

B. wenn sie numerisch sind und alle einzelnen Glieder reel:

1) Eine Reihe ist dann gewiß konvergent, so oft von irgend einem ihrer Glieder ab, diese Glieder eben so schnell oder schneller abnehmen, als die der geometrischen Reihe

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots$$

für den Fall, daß $x<1$, oder $x=\frac{\mu}{\nu}$, aber $\mu<\nu$ ist.

2) In einer unendlichen Reihe ist das erste Glied größer als die Summe aller übrigen Glieder, wenn jedes folgende Glied $=$ oder $<$ ist, als die Hälfte des vorhergehenden Gliedes.

3) In einem solchen Falle ist der Werth der Reihe positiv oder negativ, je nachdem ihr erstes Glied positiv oder negativ ist.

4) Im allgemeinen erkennt man die Konvergenz einer unendlichen Reihe daran, daß man n ihrer ersten Glieder addirt, und diesen Ausdruck für den Fall betrachtet, daß das in ihm befindliche n immer größer und größer und zuletzt ohne Grenzen größer (unendlich groß) wird, und wenn er selbst dann doch nicht unendlich wird, sondern höchstens einer bestimmten endlichen Zahl sich immer mehr nähert, ohne sie je erreichen zu können.

5) Eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe kann für sehr klein genommene Werthe von h allemal konvergent werden, so oft nicht einer der Koeffizienten der Reihe unendlich groß wird.

19.

Man kommt nun zu der Aufgabe:

Die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3, 2c. der unendlichen Reihe

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+A_4\cdot x^4+\ldots\ldots$$

---

*) Man vergleiche hierüber besonders die „Aufsätze aus dem „Gebiete der höhern Mathematik." Berlin, 1823.

so zu finden, daß wenn F(x) diese Reihe vorstellt, dann

$$1)\quad F(x)\cdot F(y) = F(x+y)$$

seyn müsse.

Man lößt aber diese Aufgabe dadurch, daß man in der Gleichung (1.) statt F(x), F(y) und F(x+y) die unendlichen Reihen selbst setzt, so daß man eine Gleichung zwischen zwei unendlichen Reihen erhält, und dann nach (N. 18. 1.) die Koeffizienten derselben einzeln gleich hat, also so viele Gleichungen, als zur Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten gerade nothwendig sind.

Die Rechnung selbst wird gewöhnlich so geführt. Man hat

$$2)\quad F(x) = A_0 + A_1\cdot x + A_2\cdot x^2 + A_3\cdot x^3 + A_4\cdot x^4 + \cdots$$

$$3)\quad F(y) = A_0 + A_1\cdot y + A_2\cdot y^2 + A_3\cdot y^3 + A_4\cdot y^4 + \cdots$$

$$4)\quad F(x+y) = A_0 + A_1\cdot(x+y) + A_2\cdot(x+y)^2 + A_3\cdot(x+y)^3 + \cdots$$

d. h. weil

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,\ (x+y)^3 = x^3+3x^2y+\cdots \quad \text{ist,}$$

$$\begin{aligned}5)\quad F(x+y) = {} & A_0 + A_1\cdot x + A_2\cdot x^2 + A_3\cdot x^3 + A_4\cdot x^4 + \cdots \\ & + A_1 y + 2A_2\cdot xy + 3A_3\cdot x^2y + 4A_4\cdot x^3y + 5A_5\cdot x^4y + \cdots \\ & + A_2\cdot y^2 + 3A_3\cdot xy^2 + 6A_4\cdot x^2y^2 + \cdots + \cdots \\ & + \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

so wie, wenn man die (3.) mit F(x) multiplizirt,

$$6)\quad F(x)\cdot F(y) = A_0\cdot F(x) + A_1\cdot F(x)\cdot y + A_2\cdot F(x)\cdot y^2 + \cdots\cdots$$

Da nun, dem Verlangten zufolge, die beiden nach y fortlaufenden Reihen zur Rechten in (5. u. 6.) einander gleich seyn müssen, so muß auch der Koeffizient von y^1 in (5.) gleich seyn dem Koeffizienten von y^1 in (6.), nämlich:

$$A_1 + 2A_2\cdot x + 3A_3\cdot x^2 + 4A_4\cdot x^3 + \cdots\cdots = A_1\cdot F(x);$$

oder, wenn man statt F(x) die Reihe selbst setzt:

$$\begin{aligned}7)\quad & A_1 + 2A_2\cdot x + 3A_3\cdot x^2 + 4A_4\cdot x^3 + 5A_5\cdot x^4 + \cdots = \\ & A_1A_0 + A_1^2\cdot x + A_1A_2\cdot x^2 + A_1A_3\cdot x^3 + A_1A_4\cdot x^4 + \cdots,\end{aligned}$$

wo nun wieder die einzelnen, hier unter einander stehenden Koeffizienten von x^1, x^2, x^3, ꝛc. einander gleich seyn müssen, so daß man hat die Gleichungen

$$A_1 = A_1 \cdot A_0, \quad \text{woraus} \quad A_0 = 1 \text{ folgt;}$$

$$\text{dann} \quad 2 \cdot A_2 = A_1^2, \quad \text{also} \quad A_2 = \frac{A_1^2}{2},$$

$$\text{ferner} \quad 3 \cdot A_3 = A_1 \cdot A_2, \quad \text{woraus} \quad A_3 = \frac{A_1^3}{2 \cdot 3},$$

$$\text{und} \quad 4 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_3, \quad \text{demnach} \quad A_4 = \frac{A_1^4}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\text{und} \quad 5 \cdot A_5 = A_1 \cdot A_4, \quad \text{mithin} \quad A_5 = \frac{A_1^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

u. s. w. f.

so daß man zuletzt hat

$$8) \; F(x) = 1 + A_1 \cdot x + \frac{A_1^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{A_1^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{A_1^4 \cdot x^4}{4!} + \frac{A_1^5 \cdot x^5}{5!} + \cdots,$$

unter $n!$ das Produckt $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n$ verstanden, so daß $3! = 2 \cdot 3$, $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4$, u. s. w. f. ist.

20.

Nachdem A_1 ganz unbestimmt bleibt, existiren also für die unendlich vielen Werthe von A_1, unendlich viele Reihen, denen allen dieselbe Eigenschaft zukommt, daß nämlich $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$ ist, eine Eigenschaft, welche auch die reele Potenz a^x hat, insofern $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ seyn muß. Unter allen den in (N. 19. s.) vorgestellten Reihen, muß also für reele x, auch die eine vorkommen, welche der Potenz a^x gleich seyn muß, nachdem früher bereits (N. 15.) eingesehen worden ist, daß a^x sich in eine solche Reihe umgestalten läßt. Daher entsteht nun die zweite Aufgabe: „den Werth von A_1 zu finden, so daß

$$1) \; a^x = 1 + A_1 \cdot x + \frac{A_1^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{A_1^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{A_1^4 \cdot x^4}{4!} + \cdots$$

wird." —

Setzt man aber in dieser Gleichung $x = 1$, so erhält man:

$$2)\ a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{3!} + \frac{A_1^4}{4!} + \cdots,$$

welche Gleichung die gesuchte Abhängigkeit des a und A_1 von einander ausdrückt, aus welcher jedoch schwer A_1 in a wirklich ausgedrückt gefunden werden kann.

Es kann aber (und es muß auch) bewiesen werden, daß es unendlich viele Werthe für A_1 gibt, welche derselben Gleichung (2.) genügen, und daß für jedem dieser Werthe von A_1, auch die Gleichung (1.) eine identische wird, so daß die Reihe zur Rechten in (1.), für diese unendlich vielen, zu einem positiven a aus (2.) sich ergebenden Werthe von A_1, und für ein reeles x, allemal nur einen einzigen Werth liefert, nämlich den der reelen Potenz a^x, welche letztere immer nur einen einzigen Werth hat.

21.

Man pflegt nun umgekehrt $A_1 = 1$ zu setzen und das zugehörige a aus der Gleichung (N. 20. 2.) zu berechnen, und diesen berechneten Ziffernwerth durch e zu bezeichnen, so daß

$$1)\ e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$
$$= 2{,}718281828459\cdots$$

der Werth von a ist, für welchen einer der Werthe von $A_1, = 1$ wird. Dann folgt, wenn man in (N. 20. 1.) dieselben Werthe substituirt:

$$2)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

so oft x reel, also e^x eine reele Potenz ist.

22.

Dieselbe Reihe in (N. 21. 2.) kann man nun überhaupt durch e^x vorgestellt seyn lassen, so daß eben dadurch e^x für jedes x eine Bedeutung gewinnt, und dann natürliche Potenz genannt wird.

Die natürliche Potenz ist jedesmal nur eindeutig, und es gelten für sie die Gesetze des Operirens mit Potenzen, wie solche für die frühern speziellern Potenzen entwickelt sind.

23.

Mit der natürlichen Potenz e^x, ist der natürliche Logarithme $log\,b$ gegeben, wenn man darunter jeden der unendlich vielen Werthe von x versteht, welche $e^x = b$ d. h.

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=b$$

machen.

Um aber alle diese unendlich vielen Werthe von $log\,b$ zu finden, sieht man sich veranlaßt, die unendlichen Reihen

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$$

und $$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

näher zu betrachten, nachdem solche vorher, der Kürze wegen, durch $Cos\,x$ und $Sin\,x$ bezeichnet, und trigonometrische Funktionen genannt worden sind.

Für diese (unendlich-vieldeutigen) Logarithmen findet man die gewöhnlichen Gesetze, jedoch mit den Beschränkungen, welche die Vieldeutigkeit der Ausdrücke mit sich bringt, so daß ihre Anwendung im Besonderen die Vorsicht fordert, welche sich (N. 13.) für die mehrdeutigen Wurzeln angegeben findet.

24.

Für die in diese Untersuchung verknüpften trigonometrischen Funktionen $Cos\,x$ und $Sin\,x$ finden sich die aus der gewöhnlichen analytischen Trigonometrie bekannten Gesetze, obgleich hier ihr Zusammenhang mit der Geometrie (im Besondern, für besondere Werthe von x) unbeachtet gelassen wird.

Für diejenigen Leser dagegen, welche diese Begriffe der Sinus und Kosinus aus geometrischen Betrachtungen kennen ge-

lernt haben, mag hier noch stehen, wie man sich von jener Ansicht aus, zu den Reihen selbst, wie sie nachher (in so ferne sie für jedes, auch imaginäre x, eine bestimmte Bedeutung haben) als allgemeinere Begriffe der Sinus und Kosinus beibehalten werden, erheben kann.

Aus jenen speziellen Begriffen, wo x und y Winkel vorstellen, leitet man nämlich ab:

1) $Sin(x \pm y) = Sin\,x \cdot Cos\,y \pm Cos\,x \cdot Sin\,y$,

2) $Cos(x \pm y) = Cos\,x \cdot Cos\,y \mp Sin\,x \cdot Sin\,y$;

und daraus wieder durch Addition

3) $Cos(x+y) + Cos(x-y) = 2\,Cos\,x \cdot Cos\,y$,

während vorher schon

4) $(Cos\,x)^2 + (Sin\,x)^2 = 1$,

und 5) $Sin(-x) = -Sin\,x$,

6) $Cos(-x) = \quad Cos\,x$,

so wie

7) $Cos\,0 = 1$ und $Sin\,0 = 0$,

letztere der Analogie nach, hingestellt worden sind.

Hernach kann man (besonders wenn man schon wüßte, daß eine solche nothwendig existirt) eine unendliche Reihe nach x suchen, die durch f(x) bezeichnet seyn mag, und welche die in der Gleichung (3.) ausgesprochene Eigenschaft mit $Cos\,x$ gemein hat, so nämlich, daß

8) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ ist.

Soll jedoch die Reihe f(x) mit $Cos\,x$ auch die andere Eigenschaft in (6.), nämlich, $Cos(-x) = Cos\,x$ gemein haben, so darf sie nur gerade Potenzen von x enthalten, weil nur diese sich nicht ändern, wenn $-x$ statt x gesetzt wird.

Man sucht also die Koeffizienten in

9) $f(x) = B_0 + B_2 \cdot x^2 + B_4 \cdot x^4 + B_6 \cdot x^6 + \cdots$

so, daß wenn

$$10)\ f(y) = B_0 + B_2 \cdot y^2 + B_4 \cdot y^4 + B_6 \cdot y^6 + \cdots$$

$$11)\ f(x+y) = B_0 + B_2 \cdot (x+y)^2 + B_4 \cdot (x+y)^4 + B_6 \cdot (x+y)^6 + \cdots$$

$$12)\ f(x-y) = B_0 + B_2 \cdot (x-y)^2 + B_4 \cdot (x-y)^4 + B_6 \cdot (x-y)^6 + \cdots$$

genommen wird, dann die Gleichung

$$8)\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$$

identisch wird.

Setzt man aber

$$x^2 \pm 2xy + y^2 \text{ statt } (x \pm y)^2,$$

$$x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4 \text{ statt } (x+y)^4,$$

u. s. w. f., so erhält man, wenn (11.) u. (12.) addirt werden, und wenn man zugleich durch 2 dividirt:

$$13)\ \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2} = \begin{array}{l} B_0 + B_2 \cdot x^2 + B_4 \cdot x^4 + B_6 \cdot x^6 + \cdots \\ \quad + B_2 \cdot y^2 + 6B_4 \cdot x^2y^2 + 15B_6 \cdot x^4y^2 + \cdots \\ \quad\quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \end{array}$$

während aus (10.), mit f(x) multiplizirend,

$$14)\ f(x) \cdot f(y) = B_0 \cdot f(x) + B_2 \cdot f(x) \cdot y^2 + B_4 \cdot f(x) \cdot y^4 + \cdots$$

hervorgeht. — Da nun diese Reihen in (13.) und (14.) zur Rechten einander gleich werden sollen (nach 8.), so müssen auch die Koeffizienten von y^2 in beiden dieselben seyn, nämlich

$$B_2 + 6B_4 \cdot x^2 + 15B_6 \cdot x^4 + 28B_8 \cdot x^6 + \cdots = B_2 \cdot f(x),$$

oder, wenn man für f(x) die Reihe selbst schreibt, aus (9.):

$$15)\ B_2 + \frac{4 \cdot 3}{2} B_4 \cdot x^2 + \frac{6 \cdot 5}{2} B_6 \cdot x^4 + \frac{8 \cdot 7}{2} B_8 \cdot x^6 + \cdots =$$
$$B_2B_0 + B_2B_2 \cdot x^2 + B_2B_4 \cdot x^4 + B_2B_6 \cdot x^6 + \cdots;$$

in welchen Reihen wieder die einzelnen (hier unter einander stehenden) Koeffizienten gleich seyn müssen, so daß man hat die Gleichungen:

$$B_2 = B_2 \cdot B_0, \quad \text{folglich} \quad B_0 = 1,$$

und $\frac{4 \cdot 3}{2} B_4 = (B_2)^2$, also $B_4 = \frac{(2B_2)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4}$,

und $\frac{6 \cdot 5}{2} B_6 = B_2 \cdot B_4$, demnach $B_6 = \frac{(2B_2)^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$,

und $\frac{8 \cdot 7}{2} B_8 = B_2 \cdot B_6$, mithin $B_8 = \frac{(2B_2)^4}{8!}$,

u. s. w. f.; also daß ist:

16) $f(x) =$

$$= 1 + \frac{(2B_2)}{2!} \cdot x^2 + \frac{(2B_2)^2}{4!} \cdot x^4 + \frac{(2B_2)^3}{6!} \cdot x^6 + \frac{(2B_2)^4}{8!} \cdot x^8 + \cdots.$$

Und da für B_2 jeder Werth gesetzt werden kann, so hat man unendlich viele Reihen, welche alle dieselben verlangten Eigenschaften mit *Cos* x gemein haben, und unter denen also auch die Reihe seyn muß, welche dem *Cos* x gleich ist, so oft *Cos* x eine Bedeutung hat.*)

Es bleibt daher noch die Aufgabe übrig:: „Unter allen den Werthen von B_2 diejenigen herauszusuchen, für welche die Reihe f(x) mit *Cos* x nicht bloß die beiden vorhin verlangten Eigenschaften gemein hat, sondern wirklich ihm gleich ist."

Um jedoch diese Aufgabe zu lösen, pflegt man zuerst eine Reihe für *Sin* x zu suchen, und verfährt dabei ohngefähr so:

Aus den Formeln (1. u. 2.) leitet man auch noch ab, durch Subtraktion:

17) $Cos(x-y) - Cos(x+y) = 2 Sin x \cdot Sin y$.

Und da $Sin(-x) = -Sin x$ ist, so kann die Reihe für *Sin* x nur ungerade Potenzen von x enthalten, weil nur diese alle zu-

---

*) Wenn man nämlich gewiß weiß, daß eine solche Reihe existirt. Weil man dieses aber gewöhnlich vorher nicht gewiß weiß, so bleibt die Voraussetzung der Existenz einer solchen unendlichen, den Werth des *Cos* x liefernden Reihe, immer mehr oder weniger eine petitio principii.

gleich ihre Zeichen ändern, wenn $-x$ statt x gesetzt wird. Setzt man also die für $Sin\,x$ gesuchte Reihe

$$18)\quad Sin\,x = B_1 \cdot x + B_3 \cdot x^3 + B_5 \cdot x^5 + \cdots,$$

so hat man

$$19)\quad Sin\,y = B_1 \cdot y + B_3 \cdot y^3 + B_5 \cdot y^5 + \cdots,$$

während, wenn für $Cos(x-y)$ und $Cos(x+y)$ die in (16.) gefundenen Reihen gesetzt werden,

$$20)\quad \frac{Cos(x-y) - Cos(x+y)}{2}$$

$$= -2\frac{(2B_2)}{2!} \cdot xy - 4\frac{(2B_2)^2}{4!} \cdot x^3 y - 6\frac{(2B_2)^3}{6!} \cdot x^5 y - \cdots$$

$$-4\frac{(2B_2)^2}{4!} \cdot xy^3 - 20\frac{(2B_2)^3}{6!} \cdot x^3 y^3 - \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

und aus (19.)

$$21)\quad Sin\,x \cdot Sin\,y = B_1 \cdot Sin\,x \cdot y + B_3 \cdot Sin\,x \cdot y^3 + \cdots$$

ist. Da nun, der (N. 17.) zu Folge, die Reihen zur Rechten in (20. u. 21.) einander gleich seyn müssen, so müssen auch die Koeffizienten von y^1 einander gleich seyn, d. h.

$$-2B_2 x - \frac{(2B_2)^2}{3!} x^2 - \frac{(2B_2)^3}{5!} x^5 - \cdots = B_1 \cdot Sin\,x,$$

oder, wenn man für $Sin\,x$ die Reihe selbst setzt, aus (18.):

$$22)\quad -2B_2 \cdot x - \frac{(2B_2)^2}{3!} \cdot x^3 - \frac{(2B_2)^3}{5!} \cdot x^5 - \frac{(2B_2)^4}{7!} \cdot x^7 - \cdots =$$

$$B_1 B_1 \cdot x + B_1 B_3 \cdot x^3 + B_1 B_5 \cdot x^5 + B_1 B_7 \cdot x^7 + \cdots,$$

in welcher Gleichung wiederum die einzelnen Koeffizienten (die hier unter einander stehen) einander gleich seyn müssen, so daß man erhält die Gleichungen

$$-2B_2 = B_1^2 \quad \text{oder} \quad B_2 = -\tfrac{1}{2} B_1^2;$$

$$\text{und} \quad -\frac{(2B_2)^2}{3!} = B_1 \cdot B_3, \quad \text{also} \quad B_3 = -\frac{1}{3!} B_1^3;$$

$$\text{und} \quad -\frac{(2B_2)^3}{5!} = B_1 \cdot B_5, \quad \text{folglich} \quad B_5 = \frac{1}{5!} B_1^5;$$

und $-\frac{(2B_2)^4}{7!} = B_1 \cdot B_7$, demnach $B_7 = -\frac{1}{7!} B_1^7$;

u. s. w. f.

Setzt man aber diese Werthe für B_2, B_3, B_5, B_7 2c. in die Gleichungen (16. und 18.) und bemerkt man, daß man unter B_2 bereits den Werth gedacht hat, der $f(x) = Cos\, x$ macht, so hat man

$$23)\quad Cos\, x = 1 - \frac{B_1^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{B_1^4 \cdot x^4}{4!} - \frac{B_1^6 \cdot x^6}{6!} + \cdots\cdot$$

und $$24)\quad Sin\, x = B_1 \cdot x - \frac{B_1^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{B_1^5 \cdot x^5}{5!} - \frac{B_1^7 \cdot x^7}{7!} + \cdots\cdot,$$

wo jetzt nur noch der Werth von B_1 zu suchen übrig bleibt. — Man findet aber, daß $Sin\, x$ mit x desto näher zusammenfällt, je kleiner x gedacht wird, wenn nur x den Bogen bedeutet für den Radius 1, der zu diesem, anfänglich als Winkel gedachten x gehört; und da die Reihe zur Rechten in (24.) für $Sin\, x$, desto näher dem ersten Gliede $B_1 x$ rückt, je kleiner x ist, so hat man $B_1 = 1$ zu nehmen, im Falle dieser letztgedachten Bedingung genügt werden muß; also daß wird

$$25)\quad Cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

und $$26)\quad Sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

wenn zur Rechten x der Bogen ist, für den Radius 1, der zwischen den Schenkeln des Winkels x zur Linken, beschrieben werden kann.*)

---

*) Gründlicher aber bleibt es immer, wenn man, ohne von geometrischen Betrachtungen auszugehen, sogleich diese unendlichen Reihen selbst unter $Cos\, x$ und $Sin\, x$ einführt, und später, in den Anwendungen auf Geometrie, erst zeigt, wie solche für spezielle Werthe von x, dort als von Linien abhängig veranschaulicht werden können.

25.

Von den natürlichen Logarithmen ist noch besonders zu merken:

1) Jede positive Zahl $+a$ hat nur einen einzigen reelen natürlichen Logarithmen, welcher durch La bezeichnet wird; die übrigen Werthe von $log\,a$ sind alle imaginär und in der Formel

$$log\,a = La \pm 2\mathfrak{a}\pi \cdot i$$

enthalten, unter π die Zahl 3,14159... (die Länge des Halbkreises für den Radius 1), unter $\mathfrak{a}$ jede ganze Zahl (oder Null), und unter i die $\sqrt{-1}$ verstanden; d. h. sowohl die reele Zahl La, als auch die imaginären Zahlen $La \pm 2\mathfrak{a}\pi \cdot i$, haben mit einander die Eigenschaft gemein, daß sie statt x gesetzt, $e^x = a$ d. h.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = a \quad \text{machen.}$$

2) Die negative Zahl $-a$ hat bloß imaginäre Werthe des natürlichen Logarithmen, die alle enthalten sind in der Formel

$$log(-a) = La \pm (2\mathfrak{a}+1)\pi \cdot i.$$

3) Alle Werthe von $log(p + q \cdot i)$ sind enthalten in der Formel

$$log(p+q\cdot i) = Lr + (\pm 2\mathfrak{a}\pi + \varphi)\cdot i,$$

wenn $r = +\sqrt{p^2+q^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$ und $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$ ist, wo dann φ innerhalb der 4 ersten Quadranten dazu genommen werden kann.

Und diese Formel enthält die vorigen in (1. u. 2.) in sich, wenn $q = 0$ und $p = +a$, oder $p = -a$ gesetzt wird.

26.

Da aber nach (N. 20.) jeder Werth von A_1, welcher der dortigen Gleichung (2.) genügt, also nach (N. 21. 2.) der Gleichung

$$e^{A_1} = a \quad \text{oder} \quad A_1 = log\,a$$

genügt, da folglich jeder Werth von $log\, a$, statt A_1 in (N. 20. 1.) gesetzt, die Gleichung

$$1)\quad a^x = 1 + \frac{x \cdot log\, a}{1} + \frac{x^2 \cdot (log\, a)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (log\, a)^3}{3!} + \cdots$$

identisch macht, so oft a^x eine Bedeutung hat, so kann man diese Reihe rechts als den allgemeinsten Begriff der Potenz a^x nehmen, also von nun an unter a^x nichts anders als diese unendliche Reihe selbst sich denken. — Ist nun a positiv, so hebt sich einer der Werthe von $log\, a$, nämlich der reele La, von selber hervor, und was die Reihe

$$1 + \frac{x \cdot log\, a}{1} + \frac{x^2 \cdot (log\, a)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (log\, a)^3}{3!} + \cdots$$

dann gibt, wenn dieser statt $log\, a$ gesetzt wird, mag die künstliche Potenz genannt werden. — Ist aber a nicht positiv, sondern negativ oder imaginär, so hebt sich keiner der Werthe von $log\, a$ auf eine naturgemäße Weise hervor, man muß einen nach dem andern statt $log\, a$ setzen, und die Potenzreihe selbst bekommt daher unendlich viele Werthe, welche also alle unter dem Begriff der allgemeinen Potenz a^x zusammengefaßt bleiben müssen, wo dann a, eben weil es allgemein gedacht ist, auch wiederum positiv werden kann.

In jedem Falle ist aber nach (N. 21. 2.):

$$2)\quad a^x = e^{x \cdot log\, a},$$

die natürliche Potenz zur Rechten in dem Sinne der (N. 21.) genommen.

27.

Von dieser allgemeinen Potenz a^x ist zu merken:

1) Sie hat allemal unendlich viele wirklich von einander verschiedener Werthe, wenn x imaginär ist.

2) Sie hat nur n von einander wirklich verschiedener Werthe, wenn $x = \pm \frac{m}{n}$ und der Bruch $\frac{m}{n}$ dabei in seinen kleinsten

Zahlen ausgedrückt ist, und diese n Werthe von $a^{\pm\frac{m}{n}}$ sind zu gleicher Zeit die n Werthe von $\sqrt[n]{(a^{\pm m})}$.

Und ist a eine positive Zahl +a, so hat man

$$\text{I.}\quad (+a)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\frac{2\alpha m\pi}{n} \pm i\cdot Sin\frac{2\alpha m\pi}{n}\right];$$

$$\text{II.}\quad (-a)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\frac{(2\alpha+1)m\pi}{n} \pm i\cdot Sin\frac{(2\alpha+1)m\pi}{n}\right];$$

$$\text{III.}\quad (p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\cdot Lr}\cdot\left[Cos\frac{(2\alpha\pi\pm\varphi)m}{n} \pm i\cdot Sin\frac{(2\alpha\pi\pm\varphi)m}{n}\right],$$

wenn man statt α setzt die Werthe 0,1,2,3,4,.... bis n—1, und zugleich alle obern (+ oder —) Zeichen allein, oder alle untern allein nimmt, oder wenn man die obern mit einander und zugleich auch die untern mit einander nimmt, dann aber statt α bloß die Hälfte der Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}n$ oder bis $\frac{1}{2}(n-1)$ setzt; wo ferner $e^{\frac{m}{n}\cdot La} = a^{\frac{m}{n}}$ den einzigen reelen Werth (der mit der absoluten Wurzel $\sqrt[n]{(a^m)}$ übereinkommt) dieser Potenz bedeutet, wo $r = +\sqrt{p^2+q^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$, $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$ ist, und wo $e^{\frac{m}{n}\cdot Lr} = r^{\frac{m}{n}}$ den einzigen reelen Werth dieser Potenz $r^{\frac{m}{n}}$ vorstellt, welcher wieder mit der absoluten Wurzel $\sqrt[n]{(r^m)}$ zusammenfällt. Und in diesen Gleichungen kann man links und rechts auch —m statt m setzen.

Setzt man aber in (III.) r = 1, also p = $Cos\,\varphi$ und q = $Sin\,\varphi$, so ergibt sich noch

$$\text{IV.}\quad (Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)^{\frac{m}{n}} = Cos\frac{(2\alpha\pi\pm\varphi)m}{n} \pm i\cdot Sin\frac{(2\alpha\pi\pm\varphi)m}{n},$$

welcher Ausdruck zur Rechten alle n Werthe der Potenz zur Linken liefert, auf die eben beschriebene Weise.

3) Ist aber x eine positive oder negative ganze Zahl, so fallen alle Werthe von $e^{x \cdot log\, a}$ oder a^x, in einen und denselben, nämlich in die Differenz-Potenz (positive ganze, oder negative ganze Potenz) zusammen.

28.

Obgleich für diese allgemeinen Potenzen dieselben Operationsformeln statt finden, wie für die frühern speziellern Potenzen, so finden sie doch nur mit der Einschränkung statt, welche die Vieldeutigkeit der allgemeinen Potenz mit sich bringt, und erfordern die Vorsicht, welche in (N. 13.) für die Wurzeln erwähnt worden ist.

29.

Mit der künstlichen Potenz $a^x = e^{x \cdot La}$ (wo a nothwendig positiv ist) ist zu gleicher Zeit der künstliche Logarithme $\overset{a}{log}\, b$ (wo die Basis a nothwendig positiv ist) gegeben, wenn man darunter jeden Ausdruck x versteht, welcher a^x d. h. $e^{x \cdot La} = b$ macht.

Von diesem hat man sich bloß zu merken, daß

$$\overset{a}{log}\, b = \frac{log\, b}{La} = \frac{1}{La} \cdot log\, b \quad \text{ist,}$$

d. h. daß alle Werthe des zur positiven Basis a gehörigen künstlichen Logarithmen $\overset{a}{log}\, b$ gefunden werden, wenn man alle Werthe des natürlichen Logarithmen $log\, b$ durch den einzigen reelen Werth La des natürlichen Logarithmen der Basis a, dividirt, oder mit $\frac{1}{La}$ multiplizirt. — Diese Zahl $\frac{1}{La}$ wird gewöhnlich der Modul des künstlichen Logarithmen genannt.

30.

Von den trigonometrischen Funktionen ist noch besonders zu merken:

1) Zu jedem gegebenen Sinus $\pm p$ und Kosinus $\pm q$ (wo $p^2 + q^2 = 1$ seyn muß) gehören unendlich viele Bogen, alle

enthalten in der Formel $\pm 2a\pi + \varphi$, wenn φ der innerhalb der 4 ersten Quadranten nothwendig liegende und einzige dieser Bogen ist, für welchen $Sin\varphi = \pm p$ und $Cos\varphi = \pm q$ die gegebenen sind. — Und ist z der Bogen im ersten Quadranten, dessen Sinus und Kosinus, die positiven Glieder p und q sind, so ist:

$\varphi = z$, wenn Sinus und Kosinus zugleich positiv gegeben sind,
oder $\varphi = \pi - z$, wenn der Sinus positiv, der Kosinus aber negativ gegeben war,
oder $\varphi = \pi + z$, wenn der Sinus und der Kosinus zugleich negativ gegeben sind,
oder $\varphi = 2\pi - z$, wenn der Sinus negativ, dagegen der Kosinus positiv gegeben seyn sollte.

2) Ist der Sinus allein gegeben, so gehören doppelt so viele Bogen dazu, weil dann, wenn der Sinus positiv gegeben ist,

$$\varphi = z \quad \text{und zugleich} \quad \varphi = \pi - z,$$

und wenn der Sinus negativ gegeben ist,

$$\varphi = \pi + z \quad \text{und zugleich} \quad \varphi = 2\pi - z \qquad \text{ist,}$$

unter z durchaus den Bogen im ersten Quadranten verstanden, welcher denselben gegebenen aber positiven Sinus hat.

Und ist der Kosinus allein gegeben, so gehören wieder doppelt so viele Bogen dazu, weil dann, wenn er positiv gegeben ist

$$\varphi = z \quad \text{und zugleich} \quad \varphi = 2\pi - z;$$

und wenn er negativ gegeben ist,

$$\varphi = \pi - z \quad \text{und zugleich} \quad \varphi = \pi + z \qquad \text{ist,}$$

unter z durchaus den Bogen im ersten Quadranten verstanden, der denselben gegebenen aber positiven Kosinus hat.

31.

Ist der Sinus eines Bogens x gegeben $= \alpha$, so sind dadurch der Kosinus, die Tangente, die Kotangente, die Sekante und die Kosekante mit gegeben, jedoch der Kosinus und alle übrigen vom Kosinus abhängenden, doppeldeutig, weil aus

$Sin\,x = \alpha$, folgt: $Cos\,x = \sqrt{1-\alpha^2}$,

$$Tg\,x = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ und } Cotg\,x = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha},$$

wo die Quadratwurzel jeden ihrer beiden Werthe vorstellen kann.

32.

Es ist daher nicht ganz einerlei, ob ein Bogen dadurch gegeben wird, daß man seinen Sinus $= \alpha$ gibt, oder dadurch, daß man seinen Kosinus $= \sqrt{1-\alpha^2}$ bezeichnet, ohne seinen Sinus zu geben, weil im letztern Fall doppelt so viele Bogen gegeben sind als im erstern, die alle der Bedingung genügen. Und wollte man den Kosinus bloß positiv nehmen $+\sqrt{1-\alpha^2}$, so würden die Bogen dazu gehören

$$\pm 2a\pi + z \quad \text{und} \quad \pm 2a\pi - z,$$

während die zu dem gegebenen Sinus $= \alpha$ gehörigen Bogen in

$$\pm 2a\pi + z \quad \text{und} \quad \pm (2a+1)\pi - z$$

enthalten sind, wenn α positiv, dagegen in

$$\pm (2a+1)\pi + z \quad \text{und} \quad \pm 2a\pi - z$$

wenn α negativ seyn sollte; so daß in jedem Falle nur eine gewisse Parthie der Bogen übereinstimmen würden.

33.

Wird daher der Bogen, dessen Sinus $= \alpha$ ist, durch $\frac{1}{Sin}\alpha$ *) bezeichnet, und haben $\frac{1}{Cos}$, $\frac{1}{Tg}$, $\frac{1}{Cotg}$ ähnliche Bedeutungen, so kann man zwar schreiben

---

*) Was hier $\frac{1}{Sin}x$ bedeutet, wird gewöhnlich arc. $Sin\,x$ genannt; eben so sind die Bedeutungen

von $\frac{1}{Cos}\alpha$, $\frac{1}{Tg}\alpha$, $\frac{1}{Cotg}\alpha$ einerlei mit arc. $Cos \cdot \alpha$, arc. $Tg \cdot \alpha$, arc. $Cotg \cdot \alpha$

$$\frac{1}{Sin}\alpha = \frac{1}{Cos}\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{1}{Tg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{Cotg}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha};$$

aber man muß nicht übersehen, daß diese 4 Ausdrücke nicht durchaus gleichbedeutend sind, sondern nur in Parthien von Werthen mit einander übereinstimmen.

Hat man bloß Bogen im Sinne in bestimmten Quadranten, und nicht alle möglichen; hat man namentlich nur Bogen im ersten Quadranten im Sinne, so sind diese gedachten 4 Ausdrücke genau dieselben, hinsichtlich ihrer Bedeutung.

34.

In demselben Sinne sind die Gleichungen zu nehmen

$$\frac{1}{Cos}\alpha = \frac{1}{Sin}\sqrt{1-\alpha^2} = \frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{1}{Cotg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}};$$

$$\frac{1}{Tg}\alpha = \frac{1}{Sin}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{Cos}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{Cotg}\frac{1}{\alpha};$$

$$\frac{1}{Cotg}\alpha = \frac{1}{Sin}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{Cos}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{Tg}\frac{1}{\alpha}.$$

35.

Ueberhaupt mag man noch bemerken die Gleichungen:

$$\frac{1}{Sin}\alpha \pm \frac{1}{Sin}\beta = \frac{1}{Sin}\left(\alpha\cdot\sqrt{1-\beta^2} \pm \beta\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\right);$$

$$\frac{1}{Cos}\alpha \pm \frac{1}{Cos}\beta = \frac{1}{Cos}\left(\alpha\cdot\beta \mp \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\right);$$

$$\frac{1}{Tg}\alpha \pm \frac{1}{Tg}\beta = \frac{1}{Tg}\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta};$$

$$\frac{1}{Cotg}\alpha \pm \frac{1}{Cotg}\beta = \frac{1}{Cotg}\frac{\alpha\beta \mp 1}{\beta \pm \alpha};$$

und daß in ihnen die Zeichen (gewöhnlich arc. *Sin*, arc. *Cos*, arc. *Tg*, arc. *Cotg*) unendlich vieldeutig sind, daher mit derselben Vorsicht behandelt seyn wollen, wie solches in (N. 13.) für die mehrdeutigen Wurzeln bereits bemerkt ist.

36.

Von den trigonometrischen Formeln heben wir ferner noch folgende heraus:

1) $e^{\pm xi} = Cos\,x \pm i \cdot Sin\,x$,

2) $e^{2xi} = \frac{1+i \cdot Tg\,x}{1-i \cdot Tg\,x}$,

woraus folgert

3) $\pm x = \frac{1}{i} \cdot log\,(Cos\;x \pm i \cdot Sin\;x)$,

4) $x = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{1+i \cdot Tg\,x}{1-i \cdot Tg\,x}\right)$;

so nämlich, daß die unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen zur Rechten, genau alle die Werthe des Bogens x liefert, nicht mehr und nicht weniger.

Und setzt man $Sin\,x = \alpha$, also $Cos\,x = \sqrt{1-\alpha^2}$, oder $Cos\,x = \beta$, also $Sin\,x = \sqrt{1-\beta^2}$, so daß $x = \frac{1}{Sin}\alpha$ oder $x = \frac{1}{Cos}\beta$ wird, so nimmt die Gleichung (3.) die Form an:

5) $\pm \frac{1}{Sin}\alpha = \frac{1}{i} \cdot log\left(\sqrt{1-\alpha^2} \pm i \cdot \alpha\right)$,

6) $\pm \frac{1}{Cos}\beta = \frac{1}{i} \cdot log\left(\beta \pm i \cdot \sqrt{1-\beta^2}\right)$

$= \frac{1}{i} \cdot log\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2-1}\right)$,

während aus (4.), wenn $Tg\,x = t$, also $x = \frac{1}{Tg}t$ gesetzt wird:

7) $\frac{1}{Tg}t = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{1+i \cdot t}{1-i \cdot t}\right) = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{i-t}{i+t}\right)$,

so wie noch

8) $\frac{1}{Cotg}t = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{-1+i \cdot t}{1+i \cdot t}\right)$

hervorgeht, in welchen Gleichungen zur Rechten allemal genau so viele und genau dieselben Werthe stehen, welche der zur Linken repräsentirte Bogen wirklich hat.

37.

Es ist aber aus dem vorhergehenden noch besonders ersichtlich, daß es keinen Ausdruck gibt, welcher in der Analysis behandelt wird, und welcher etwas anders seyn könnte, als eine Zusammensetzung von ursprünglich ganzen Zahlen, durch die 7 Operationen, wobei alle 7 Operationen zugleich in beliebig abgeänderter Folge (und jede beliebig oft) vorkommen, oder nur mehrere derselben.

Namentlich bemerke man aber, daß dieses besonders für die Sinus, Kosinus ꝛc. ꝛc.*) und für die durch ihre Sinus, Kosinus, Tangente oder Kotangente, ꝛc. ꝛc. gegebenen Bogen eben jetzt nachgewiesen sich findet.

38.

Die Reihe für $log(1+b)$ nach Potenzen von b, findet man am einfachsten, wenn $1+b = a$ gesetzt wird, und nun nach dem binomischen Lehrsatze genommen wird:

1) $a^x = (1+b)^x$

$$= 1+x \cdot b+\frac{x(x-1)}{2} \cdot b^2+\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3+\cdots;$$

---

*) Die Gleichungen

$$Tg\, x = \frac{Sin\, x}{Cos\, x}, \quad Cotg\, x = \frac{Cos\, x}{Sin\, x},$$

$$Sec\, x = \frac{1}{Cos\, x}, \quad Cosec\, x = \frac{1}{Sin\, x},$$

$$Sin \cdot vers.\, x = 1 - Cos\, x, \quad Cos \cdot vers.\, x = 1 - Sin\, x$$

müssen als Definitionen eingeführt werden, so daß die Tangenten, Kotangenten, Sekanten und Kosekanten, Sinusversus und Kosinusversus nichts anders sind, als Zusammensetzungen aus Sinus und Kosinus, durch Division oder Subtraktion.

nachgehends aber auch für a^x oder $(1+b)^x$ aus (N. 26. 1.):

2) $a^x = (1+b)^x = 1 + \frac{x \cdot log(1+b)}{2!} + \frac{x^2 \cdot [log(1+b)]^2}{2!} + ic.$

nimmt, wo dann die Reihen zur Rechten, für jeden Werth von x einander gleich seyn müssen. Ordnet man aber die Reihe in (1.) ebenfalls nach Potenzen von x, indem man $x(x-1)$ in x^2-x, $x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$ in x^3-3x^2+2x, ic. ic. verwandelt, so erhält man aus der Vergleichung des Koeffizienten von x^1 in (1.) und in (2.):

3) $log(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \cdots,$

woraus sogleich $log(1-b)$, und daraus wieder

4) $log\frac{1+b}{1-b} = 2(b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{7}b^7 + \cdots\cdots)$

hervorgeht, während diese Reihe wieder benutzt werden kann, um den in (N. 36. 7.) bestimmten Bogen $\frac{1}{Tg}t$ in seine Tangente t auszudrücken, so daß man erhält

5) $\frac{1}{Tg}t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \cdots,$

aus welcher Gleichung für $t = 1$, weil dann der Werth des Bogens $\frac{1}{Tg}t$ gerade $\frac{1}{4}\pi$ wird, noch

6) $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

hervorgeht.

Man kann aber auch $log(1+z)$ direkt finden, mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten, indem man Reihen sucht, nach z fortlaufend, und welche mit $log(1+z)$ die Eigenschaft gemein haben, die in der Gleichung

$$log(1+z) \cdot log(1+y) = log[1+(z+y+zy)]$$

ausgesprochen sich findet; wo man dann Reihen erhält, welche alle Logarithmen enthalten, in so ferne der erste Koeffizient unbestimmt bleibt, so daß sich ergibt

$$\overset{a}{log}(1+z) = M.(z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\tfrac{1}{4}z^4+\ldots\ldots),$$

während nachher gezeigt werden kann, daß für $M = 1$, der natürliche Logarithme $log(1+z)$ in Form einer unendlichen Reihe nach z sich ergibt.

Für den künstlichen Logarithmen $\overset{a}{log}(1+z)$ ist M von der Basis a abhängig, und zwar wie aus (N. 29.) hervorgeht,

$$M = \frac{1}{La};$$

und dieses M heißt dann der Modul des künstlichen Logarithmen für die Basis a.

39.

Für die Praxis ist es aber am bequemsten, nur natürliche Logarithmen im Kalkul zu benutzen, weil sich alle andern sogleich auf die natürlichen zurückführen lassen. Namentlich soll in der Folge nie von einem andern Logarithmen die Rede seyn, als von dem natürlichen, so oft auch Logarithmen vorkommen mögen.

Und zu rathen ist es, für die Praxis, auch bloß die (**eindeutigen**) natürlichen Potenzen statt der allgemeinen, in Rechnung zu bringen, weil jede allgemeine Potenz a^x in die natürliche Potenz $e^{x \cdot log\, a}$ sogleich übergeht, und so ihre einzelnen besondern Werthe aus den einzelnen besondern Werthen von $log\, a$ sogleich übersichtlicher in die Augen fallen.

Ferner mag man nicht übersehen, daß die unendlichen Reihen in (N. 38.) für die Logarithmen, und zuletzt für den Bogen (in seine Tangente ausgedrückt), in den Anwendungen konvergent seyn müssen, und dann immer nur einen einzigen, und zwar den reelen Werth des Logarithmen, oder den kleinsten Werth des Bogens geben.

40.

Für das bequemere Arbeiten ist noch vorzüglich bemerkbar zu machen das Produkt aequidifferenter Faktoren

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots\ldots(a+(n-1)d).$$

Solches wird durch $a^{n|d}$ bezeichnet und Faktorielle genannt. — Praktisch sehr brauchbar und unmittelbar aus dem Begriff der Faktorielle hervorgehend sind die Formeln:

$$1)\quad a^{m|d} = [a+(m-1)d]^{n|d}$$

$$2)\quad a^{m|d}.(a+md)^{n|d} = a^{m+n|d}$$

$$3)\quad a^{m-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}$$

$$4)\quad \frac{a^{m|d}}{a^{n|d}} = (a+nd)^{m-n|d}$$

$$5)\quad h^{m}.(a^{m|d}) = (ha)^{m|hd}.$$

Unter allen Faktoriellen sind es diese

$$1.2.3.4.5\ldots.m,$$

die am häufigsten vorkommen, und welche noch kürzer durch $m!$ oder m' bezeichnet und dann lieber Fakultäten genannt werden.

In der Faktorielle $a^{m|d}$, wird a die Basis, m der Exponent, und d die Differenz genannt, und es sind hier überall ganze Faktoriellen d. h. Faktoriellen mit ganzen absoluten (positiven) Exponenten vorausgesetzt worden, weil nur solche bis jetzt Bedeutung haben. Man kann sich aber vorstehender Formel (3.) bedienen, um auch Differenz-Faktoriellen einzuführen d. h. die Bedeutung von $a^{b|d}$ festzustellen, wenn b eine Differenz ganzer Zahlen $m-n$ ist, d. h. selber eine absolute ganze Zahl, oder Null, oder eine negative ganze Zahl. Dann steht auch fest die Bedeutung

$$6)\quad a^{1|d} = a; \qquad 7)\quad a^{0|d} = 1; \qquad 8)\quad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}}.$$

Und wenn man unter $m!$ nicht gerade das Produkt $1.2.3\ldots\ldots m$, sondern die Faktorielle $1^{m|1}$ oder $m^{m|-1}$ versteht, so hat auch $m!$ eine bestimmte Bedeutung, wenn m, 0 oder eine negative ganze Zahl seyn sollte. Es ist nehmlich dann

$$0! = 1; \quad 1! = 1; \quad 2! = 2; \quad 3! = 6; \text{ zc. zc.};$$

und $(-1)! = (-2)! = (-3)! = \text{zc. zc. zc.} = \frac{1}{0}.$

Es ist aber strenge erwiesen worden, daß die obigen Formeln (1. — 5.), die anfänglich nur für ganze Faktoriellen erwiesen worden sind, auch durchaus noch für Differenz-Faktoriellen gelten.*)

Ferner gilt für die Faktoriellen noch der sogenannte binomische Lehrsatz (vergl. Nr. 15.)

$$(a+b)^{m|d} = S[m_a . a^{m-a|d} . b^{a|d}];$$

jedoch lassen wir solchen jedesmal nur gelten, so oft m eine absolute ganze Zahl ist.

41.

Am wichtigsten sind uns demnächst die Binomial-Koeffizienten selbst, d. h. der Quotient

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots n},$$

welcher kürzer durch

$$\frac{m^{n|-1}}{n!}$$

bezeichnet werden kann, aber noch kürzer durch

$$m_n$$

vorgestellt wird, so zwar daß

$$m_0 = 1, \quad m_1 = m, \quad m_2 = \frac{m(m-1)}{2}, \text{ ꝛc. ꝛc.} \quad \text{ist.}$$

Man hat sich vorzüglich zu merken, daß wenn a und b beliebige absolute ganze Zahlen oder Null vorstellen, dann allemal

---

*) Gebrochene Faktoriellen sind in den beiden ersten Theilen dieses Systems noch nicht betrachtet worden. Es haben aber diese das Eigenthümliche, daß die Formeln (1.—4.) für sie gelten, die 5te dagegen nicht für sie gilt. Dies ist der Grund der vielen Widersprüche, in welche sich Kramp und alle diejenigen verwickelt gesehen haben, welche bisjetzt allgemeine (analytische) oder nur gebrochene Faktoriellen allgemein haben behandeln wollen.

$$\frac{(a+b)!}{a!\,b!} = (a+b)_a = (a+b)_b$$

oder $\qquad = m_a = m_b$ ist,

wenn $a+b = m$ seyn sollte, während

$$m_a = \frac{m^{a|-1}}{a!} \text{ und } m_b = \frac{m^{b|-1}}{b!} \text{ ist.}$$

42.

Die unendlichen Reihen müssen alle ein bestimmtes Fortschreitungsgesetz haben. Dieses Fortschreitungsgesetz ist entweder rekurrent oder independent. Es wird rekurrent genannt und die Reihe dann (obgleich unpassend) eine rekurrirende, wenn jedes folgende Glied nach einem allgemein ausgedrückten Gesetze, durch ein oder durch mehre vorhergehende Glieder gefunden werden soll; es ist dagegen independent, wenn das nte Glied als ein Ausdruck angegeben werden kann, in welchem der Buchstabe n vorkommt, und welcher nun das erste, zweite, 11te, 78ste 2c. 2c. Glied gibt, wenn in ihm 1, oder 2, oder 11, oder 78, 2c. 2c., statt n gesetzt wird.

In diesem letztern Fall repräsentirt das nte Glied jedes mögliche Glied der Reihe, so daß solches allein die ganze Reihe gibt. Dieses nte Glied heißt daher das allgemeine Glied der Reihe, die Reihe mag außerdem eine unendliche oder eine endliche seyn.

Es ist nun für eine genaue, leichte und Ueberzeugung gewährende Behandlung der Reihen höchst wichtig:

1) Von jeder Reihe, welche einem Kalkul unterworfen werden soll, jedesmal das allgemeine Glied zu nehmen, statt, wie häufig geschieht, nur einige Wenige ihrer ersten Glieder, weil das allgemeine Glied, alle Glieder zugleich enthält, also in der That geeignet ist, die Reihe ganz und vollständig bis in's Unendliche zu repräsentiren.

2) Die Art und Weise, wie die Operationen mit den Reihen, durch die Operationen mit ihren allgemeinen Gliedern ersetzt werden, so daß das letztere Resultat wiederum genauer Repräsentant

des erstern ist, durch einige leichte, einfache, aber allgemeine und umfassende Lehrsätze festzustellen.

43.

Obgleich dieses einfache Verfahren bereits im 2ten Theile dieses Systems (2te Auflage, Kap. XVII.) hinreichend aus einandergesetzt sich findet, so mag doch der Wichtigkeit des Gegenstandes halber, hier noch einmal die Sache erörtert werden.

I. Erstlich wird im allgemeinen Gliede nicht der Zeiger n, sondern an dessen Stelle irgend ein kleiner deutscher Buchstabe gebraucht und dabei jedesmal stillschweigend vorausgesetzt, daß jeder kleine deutsche Buchstabe allemal nach und nach Null und alle ganze Zahlen vorstellt bis in's Unendliche, so daß jede Einschränkung allemal noch besonders in Form von Gleichung zwischen den deutschen kleinen Buchstaben, darunter gesetzt wird. Dem so ausgedrückten allgemeinen Gliede wird dann ein S vorgesetzt, nachdem solches vorher in Klammern eingeschlossen worden, welches andeutet, daß die Summe aller dieser Glieder zu nehmen ist.

Es stellt also z. B.

$$S[x^{a}]$$

die unendliche Reihe $x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$ vor; desgleichen repräsentirt das Zeichen

$$S[(-1)^{a}\cdot x^{2a}]$$

die unendliche Reihe $x^0-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$;

und eben so stellt

$$S\left[\frac{(-1)^{a}\cdot x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

die unendliche Reihe $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$

vor, während

$$S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]_{2a+b=2n}$$

die unendliche, und aus n+1 Gliedern bestehende Reihe

$$x^0 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$ bezeichnet,

in so ferne nämlich, da nach der Annahme kein deutscher Buchstabe andere als 0 oder positive ganze Zahlen vorstellen soll, die untergesetzte Gleichung $2\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 2n$ anzeigt, daß n der größte Werth ist, welchen $\mathfrak{a}$ haben kann.

Um nun noch einige Beispiele zu geben, so bemerke man, daß sich der binomische Lehrsatz jetzt so schreiben läßt:

$$(a+b)^m = S\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!}\cdot a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}, \text{ auch } = S\left[m_{\mathfrak{b}}\cdot a^{m-\mathfrak{b}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right];$$

eben so

$$(a-b)^m = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!}\cdot a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m};$$

wenn nur hier jedesmal m eine absolute ganze Zahl ist.

II. Hat man sich mit der Bezeichnung vertraut gemacht, so verstehet sich das Operiren mit diesen allgemeinen Gliedern fast von selbst. Sollte nehmlich z. B. eine Reihe mit einem Ausdruck A multiplizirt werden, also jedes Glied der Reihe, so hat man nur diesen Repräsentanten aller Glieder zu multipliziren, und eben dadurch ist die Reihe selbst multiplizirt. Man drückt diesen Satz in dem Schema so aus

$$A \times S[f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}, \text{ꝛc.})] = S[A\cdot f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}, \text{ꝛc.})],$$

wo $f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}, \text{ꝛc.})$ einen beliebigen Ausdruck bedeutet, der als allgemeines Glied der Reihe gedacht worden ist, d. h. als Repräsentant aller Glieder derselben.

III. Sollen dagegen zwei solche Reihen mit einander multiplizirt werden, so daß also jedes Glied der einen, mit jedem Gliede der andern multiplizirt werden muß, so multiplizirt man den Repräsentanten aller Glieder der einen Reihe, mit dem Repräsentanten aller Glieder der zweiten. Man muß jedoch dann auch darauf sehen, daß die deutschen Buchstaben in dem einen Repräsentanten, alle verschieden sind von denen in dem andern,

damit in dem Produckt, eben wegen dieser Verschiedenheit, jeder der beiden Faktoren noch immer jedes mögliche Glied seiner Reihe vorstelle, wenn man bei dem andern Faktor sich auch nach und nach die einzelnen Glieder der Reihe genommen denkt. — Diesen Satz kann man so schematisiren

$$S[f(a,b,c,\cdots)] \times S[F(a,b,c,\cdots)] = S[f(a,b,c,\cdots) \times F(d,e,f,\cdots)]$$

wo $f(a,b,c,\cdots)$ und $F(a,b,c,\cdots)$ zwei völlig beliebige Ausdrücke vorstellen, die dasmal als allgemeine Glieder der Reihe gedacht werden sollen.

IV. Sollen zwei Reihen addirt oder subtrahirt werden, von oder zu einander, so kann man das $n$te Glied der einen und das $n$te Glied der andern zu einander addiren oder von einander subtrahiren, und hat dadurch die beziehlich gleich vielten Glieder zu einander addirt oder von einander subtrahirt. Dies kann so versinnlicht werden

$$S[f(a,b,c,\cdots)] \pm S[F(d,e,f,\cdots)] = S[f(a,b,c,\cdots) \pm F(a,b,c,\cdots)].$$

Es müssen aber beide Reihen so beschaffen seyn, daß beide allgemeinen Glieder (beide Repräsentanten) einerlei deutsche Buchstaben enthalten können, so daß in dem neuen Repräsentanten beide Theile (d. h. beide Summanden, oder Minuend und Subtrahend) einerlei deutsche Buchstaben wirklich erhalten können, die noch überdies jedesmal auch noch einen und denselben (durch untergesetzte Gleichungen ausgedrückten) Bedingungen unterworfen seyn müssen, weil man, sobald eine Verschiedenheit der deutschen Buchstaben statt fände, in so ferne dann die Werthe der einen von den Werthen der andern ganz unabhängig sind, nicht das $n$te Glied zu dem $n$ten addirt oder subtrahirt hätte, sondern ein und dasselbe Glied der einen Reihe zu mehren oder zu allen Gliedern (einzeln) der andern Reihe, wodurch offenbar ein unrichtiges Resultat herausgekommen seyn müßte.

V. Eine Reihe kann so beschaffen seyn, daß ihre einzelnen Koeffizienten selber wieder Reihen sind. Dies erkennt man in dem allgemeinen Gliede sogleich, wenn sich solches in zwei Fak-

toren zerlegen läßt, von denen der eine solche deutsche Buchstaben enthält, die in dem andern nicht vorkommen, weil dann, während der andere dieser Faktoren einen gewissen Werth seiner deutschen Buchstaben angenommen hat, der erstere Faktor nach und nach noch alle möglichen Werthe seiner (verschiedenen) deutschen Buchstaben zulassen muß. In diesem Falle kann man den Faktor, welcher die Koeffizienten (und selber wieder eine Reihe) vorstellt, beliebig verwandeln, ja selbst summiren (d. h. einen ihm identischen endlichen Ausdruck dafür setzen). Wegen des andern Faktors bleibt das Ganze nun doch noch eine unendliche Reihe, nur mit dem Unterschiede, daß, während vorher die einzelnen Koeffizienten selber unendliche Reihen waren, solche jetzt durch einen endlichen Ausdruck ersetzt sind. —

VI. Jede Reihe kann man in zwei und mehr Reihen zerlegen (indem man z. B. alle geraden Glieder in eine Reihe zusammenfaßt, und alle ungeraden wieder; oder immer das 1ste, 4te, 7te, ꝛc. Glied, dann das 2te, 5te, 8te, ꝛc., endlich das 3te, 6te, 9te, ꝛc.). Diese Zerlegung macht sich, mit dem Repräsentanten der Glieder rechnend, sehr einfach. Setzt man nehmlich statt eines darin vorkommenden deutschen Buchstaben z. B. statt $\mathfrak{a}$, jetzt $2\mathfrak{a}$, so kommt jetzt, wo vorher nach und nach 0,1,2,3, ꝛc. ꝛc. in inf. gesetzt werden mußten, jetzt $2\cdot0, 2\cdot1, 2\cdot2, 2\cdot3$, ꝛc. ꝛc. d. h. 0,2,4,6, ꝛc. zu stehen, also hat man jetzt nur einen Theil der Glieder. Setzt man nun statt desselben obigen $\mathfrak{a}$, auch noch $2\mathfrak{a}+1$, so hat man noch die fehlenden Glieder; und beide neue Reihen addirt, geben die erste wieder. Dies, schematisirt, sieht so aus

$$S[f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] = S[f(2\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] + S[f(2\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b},\mathfrak{c}\cdots)].$$

Setzt man ferner in einem allgemeinen Gliede statt eines der deutschen Buchstaben z. B. statt $\mathfrak{a}$, zuerst $3\mathfrak{a}$, dann $3\mathfrak{a}+1$, zuletzt $3\mathfrak{a}+2$ und addirt die drei letztern Reihen, so hat man die erstere wieder, d. h. es ist

$$S[f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] = S[f(3\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] + S[f(3\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] + S[f(3\mathfrak{a}+2,\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)].$$

VII. Man kann auch von einer Reihe, 1 Glied absondern und die übrigen Glieder wiederum durch ein allgemeines Glied ausdrücken. Der Mechanismus besteht darin, daß man in dem allgemeinen Gliede der ganzen Reihe, zuerst 0 statt eines der deutschen Buchstaben z. B. statt $\mathfrak{a}$ setzt, wodurch man ein Glied der Reihe erhält, dann aber $\mathfrak{a}+1$ statt $\mathfrak{a}$ setzt, welches alle übrigen Glieder gibt. Dies sieht sich, schematisirt, so an:

$$S[f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] = S[f(0,\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] + S[f(\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)],$$

und gibt wiederum

$$S[f(\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] = S[f(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)] - S[f(0,\mathfrak{b},\mathfrak{c},\cdots)].$$

Es sind dies aber ohngefähr die am häufigsten vorkommende Fälle, weshalb wir hier nur noch bemerken wollen, daß die auf diese Weise ausgedrückten Reihen **kombinatorische Aggregate**, auch schlechthin **Aggregate** genannt werden.

44.

Betrachtet man unendliche Reihen von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + A_4 \cdot h^4 + \cdots\cdots$$

die nach ganzen Potenzen von h fortlaufen, wo also die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots\cdot$ h nicht enthalten, ganz beliebig sind, und zum Theil auch Null seyn können, so ist leicht einzusehen:

I. Daß zwei solche Reihen zu einander addirt von einander subtrahirt und mit einander multiplizirt, nothwendig und **ohne Ausnahme** jedesmal wieder eine unendliche Reihe liefern, von derselben Form.

II. Dividirt man dagegen zwei solche unendliche Reihen durch einander, d. h. bildet man den Quotienten

$$\frac{A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots\cdot}{B_0 + B_1 \cdot h + B_2 \cdot h^2 + B_3 \cdot h^3 + \cdots\cdot},$$

so gibt dieser Quotient zwar auch jedesmal eine unendliche Reihe von derselben Form, jedoch in dem Ausnahmsfalle nicht mehr, wo $B_0 = 0$ und nicht zugleich A_0 der Null gleich ist, wie in

die Augen fällt, weil dann das erste Glied des Quotientenwerthes, $\frac{A_0}{h}$ wird, also nicht mehr ohne h ist. So lange also B_0 ganz allgemein gedacht ist, kann man sagen, daß dieser Quotient selber wieder einer Reihe genau von derselben Form gleich ist, nehmlich der Reihe

$$\frac{A_0}{B_0}+\frac{A_1B_0-B_1A_0}{B_0^2}\cdot h+ \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.};$$

und daß dieses für den Ausnahmsfall, wo $B_0 = 0$ ist, nicht nothwendig mehr gelten müsse, zeigt die Form dieses Resultats selber an, und wie man sieht, dadurch, daß dann 0 (Null) in dem Nenner vorkommt, in welchem Falle das allgemeine Resultat nie zu gelten braucht, so daß dieser Ausnahmsfall allemal von vorne herein besonders behandelt werden muß, wenn man das für ihn geltende genau und mit überzeugender Nothwendigkeit haben will.

45.

Da $\sqrt[m]{U} = U^{\frac{1}{m}}$ ist, so kann man die Wurzeln und die Potenzen in Eins zusammenfassen. Erhebt man aber eine solche Reihe von der Form

$$A_0+A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots\cdot$$

zu irgend einer $n$ten Potenz (also auch wenn man irgend eine Wurzel aus ihr nimmt), so geschieht dies, wenn man das erste Glied A_0 absondert, und die Summe der übrigen Glieder in ein einziges Glied zusammengepackt sich denkt, nach dem binomischen Lehrsatze, und man erhält dann für die $n$te Potenz der gedachten Reihe,

$$\begin{aligned}&A_0^n+n\cdot A_0^{n-1}\cdot(A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots)\\&+n_2\cdot A_0^{n-2}\cdot(A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots)^2\\&+n_3\cdot A_0^{n-3}\cdot(A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots)^3\\&+\text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.},\end{aligned}$$

wo n_2, n_3, ꝛc. ꝛc. Binomial-Koeffizienten sind; und es fällt sogleich in die Augen, daß diese $n$te Potenz allemal wieder eine

unendliche Reihe genau von derselben Form liefern wird, so lange nicht $A_0 = 0$ ist. Für den Ausnahmsfall, in welchem $A_0 = 0$ ist, zeigt sich solches sogleich in der allgemeinen Form, weil die Potenzen von 0, so oft die Exponenten negativ werden, in die Form $\frac{1}{0}$ übergehen, also in Ausdrücke, welche 0 (Null) im Nenner haben. — Es fällt dies aber auch a priori in die Augen, weil wenn $A_0 = 0$ ist, die Reihe $A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 +$ 2c. 2c. sich auch so schreiben läßt

$$h \cdot (A_1 + A_2 \cdot h + A_3 \cdot h^2 + A_4 \cdot h^3 + \cdots),$$

und die nte Potenz hiervon mit dem Gliede $A_1^n \cdot h^n$ anfangen wird, also mit einer negativen Potenz von h, oder mit einer gebrochenen positiven Potenz von h, je nachdem n negativ oder gebrochen positiv ist.

46.

Wenn man eine Zahl N mit einer unendlichen Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots$$

potenzirt, so erhält man

$$N^{A_0} \cdot N^{A_1 \cdot h} \cdot N^{A_2 \cdot h^2} \cdot N^{A_3 \cdot h^3} \cdots\cdots;$$

und da

$$N^{A_p \cdot h^p} = e^{A_p \cdot h^p \cdot log N}$$

$$= 1 + \frac{A_p \cdot log N}{1} \cdot h^p + \frac{(A_p \cdot log N)^2}{2!} \cdot h^{2p} + \cdots \text{ ist},$$

und beliebig viel solcher Reihen mit einander multiplizirt, allemal wieder eine Reihe genau von derselben Form, wie sie die erstere Reihe hat, geben müssen, so folgt, daß wenn man irgend eine Zahl N mit einer Reihe von der Form $A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + \cdots\cdot$ potenzirt, solches allemal wiederum eine Reihe genau von derselben Form gibt.

47.

Nimmt man den Logarithmen von der Reihe

$$A_0+A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots,$$

so kann man solche zuerst so schreiben

$$A_0\cdot\left(1+\frac{A_1}{A_0}\cdot h+\frac{A_2}{A_0}\cdot h^2+\frac{A_3}{A_0}\cdot k^3+\cdots\right);$$

und dann ist der gedachte Logarithme

$$=\log A_0+\log\left(1+\frac{A_1}{A_0}\cdot h+\frac{A_2}{A_0}\cdot h^2+\frac{A_3}{A_0}\cdot h^3+\cdots\right).$$

Weil nun

$$\log(1+z)=z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\tfrac{1}{4}z^4+\cdots$$

ist, so folgt, daß obiger Logarithme:

$$\begin{aligned}=\log A_0+&\left(\frac{A_1}{A_0}\cdot h+\frac{A_2}{A_0}\cdot h^2+\frac{A_3}{A_0}\cdot h^3+\cdots\right)\\ &-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{A_1}{A_0}\cdot h+\frac{A_2}{A_0}\cdot h^2+\frac{A_3}{A_0}\cdot h^3+\cdots\right)^2\\ &+\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{A_1}{A_0}\cdot h+\frac{A_2}{A_0}\cdot h^2+\frac{A_3}{A_0}\cdot h^3+\cdots\right)^3\\ &-\text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}\end{aligned}$$

seyn wird; also im Allgemeinen eine Reihe genau von derselben Form, die einzige Ausnahme abgerechnet, in welcher $A_0=0$ ist; in welchem Falle 0 im Nenner vorkommen und die dadurch veranlaßte direkte Betrachtung des Gegenstandes lehren würde, daß in diesem Ausnahmsfall die Reihe selbst das Glied $\log h$ enthält, also nicht mehr genau von derselben Form, wie die gegebene ist.

48.

Werden daher in den Reihen von der Form

$$A_0+A_1\cdot h+A_2\cdot h^2+A_3\cdot h^3+\cdots$$

die Koeffizienten noch ganz allgemein gedacht, so wird jede mögliche Verbindung, zweier oder mehrer solcher Reihen, durch beliebige der 7 Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplika-

tion, Division, Potenzirung, Radikation und Logarithmation) und wenn man die Resultate selber wieder mit solchen Reihen durch beliebige der Operationen verbindet, und so beliebig weit diese Verbindung fortsetzt, die Endresultate jedesmal Reihen seyn, genau von derselben Form.

Und die Ausnahmsfälle, welche sich für einzelne besondere Werthe der (vorzüglich erstern) Koeffizienten ergeben können, finden sich zugleich allemal und ohne Ausnahme, wenn man in den Endresultaten, alle in den allgemeinen Ausdrücken der einzelnen Koeffizienten enthaltenen Nenner, einzeln $= 0$ setzt. Und für alle diese besondern Fälle (d. h. für alle diese besondern Werthe der Koeffizienten, welche einen dieser Nenner zu Null machen), für welche das allgemeine Endresultat nicht mehr nothwendig gilt, muß man die Verbindung von vorne herein vornehmen, um die Form der Reihe in diesen Ausnahmsfällen zu erhalten.

In diesem letztern Punkte liegt aber besonders hohe Wichtigkeit.

49.

Dieser höchst wichtige Satz muß auch dann noch gelten, wenn das Endresultat durch y bezeichnet, und die Art der Zusammensetzung desselben, aus mehren, durch x, v, w, ꝛc. bezeichneten, Reihen von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots\cdots$$

nicht direkt (nicht entwickelt), sondern indirekt (verwickelt) durch eine Gleichung zwischen x, v, w, ꝛc. ꝛc. und diesem y gegeben wäre; weil jede Gleichung zwischen x, v, w, ꝛc. ꝛc. und y voraussetzt, daß irgend eine, wenn auch unbekannte Zusammensetzung mittelst der 7 Operationen aus x, v, w, ꝛc. welche durch y vorgestellt ist, existire.

50.

Es ist jedoch nicht genug zu beherzigen, daß das in den Nummern (44.—49.) behauptete nur Bezug hat auf allgemeine

Form, also nur gilt im Allgemeinen. In besondern Fällen nämlich kann und muß zwar (die bereits erwähnten Ausnahmsfälle abgerechnet) das Resultat die erwähnte allgemeine Form haben, d. h. selber wieder eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe seyn; allein die Koeffizienten dieser Reihe können selber wieder divergente numerische Reihen werden, deren Divergenz gerade andeutet, daß dasmal neue Ausnahmen von der Regel statt finden, d. h. daß für diese besondern Zahlenfälle die Form des Endresultats dennoch nicht die in Rede stehende ist.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, denke man sich die Reihe für $Cos\,h$, nehmlich

$$1+0\cdot h-\frac{h^2}{2!}+0\cdot h^3+\frac{h^4}{4!}+0\cdot h^5-\frac{h^6}{6!}+\cdots$$

zur $m$ten Potenz erhoben, so wird sogleich der eben angedeutete Fall vorhanden seyn, so oft m eine gebrochene Zahl ist, wo nämlich die $m$te Potenz dieser Reihe nach dem binomischen oder polynomischen Lehrsatze entwickelt, eine Reihe von derselben Form gibt, nach ganzen Potenzen von h fortlaufend, ja, mit Weglassung der Null-Koeffizienten, nach geraden Potenzen von h fortlaufend, während die Koeffizienten dieser Reihe divergente numerische Reihen sind.

51.

Um endlich für das nachfolgende alles Praktische zusammengedrängt zu haben, mögen hier noch die 5 unendlichen Reihen stehen, deren Bedeutung man vorzüglich im Gedächtniß haben muß, nämlich:

$$1)\ e^h = S\left[\frac{h^a}{a!}\right],$$

d. h.
$$e^h = 1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\frac{h^4}{4!}+\cdots,$$

wo
$$e = S\left[\frac{1}{a!}\right] = 2{,}718128182\cdots$$
ist;

$$2)\quad a^h = S\left[\frac{h^a \cdot (log\, a)^a}{a!}\right],$$

d. h. $$a^h = 1 + \frac{h \cdot log\, a}{1} + \frac{h^2 \cdot (log\, a)^2}{2!} + \frac{h^3 \cdot (log\, a)^3}{3!} + \cdots;$$

$$3)\quad log(1+h) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot h^{a+1}\right],$$

d. h. $$log(1+h) = h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{4}h^4 + \cdots;$$

$$4)\quad Cos\, h = S\left[(-1)^a \cdot \frac{h^{2a}}{(2a)!}\right],$$

d. h. $$Cos\, h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \cdots;$$

$$5)\quad Sin\, h = S\left[(-1)^a \cdot \frac{h^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

d. h. $$Sin\, h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \cdots;$$

wo in den letztern beiden Nummern (4. u. 5.), im Falle Sinus und Kosinus aus geometrischen Betrachtungen entnommen sind, in den Reihen zur Rechten der Buchstabe h die Länge des Bogens vorstellt für den Radius 1 genommen, zwischen den Schenkeln desjenigen Winkels konstruirt, zu welchem diese Sinus und Kosinus gehören.

52.

Bereits im ersten Theile dieses Systems wurden die Ausdrücke $ax+b$, ax^2+bx+c, ax^3+bx^2+cx+d, und $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ näher betrachtet, und namentlich die, zu stetig auf einander folgenden Werthen von x, gehörigen Werthe dieser Ausdrücke aufgesucht; dort zunächst zu dem Behuf, um unter allen reelen Werthen von x auch diejenigen zu erblicken, welche diese Ausdrücke zu Null machen. — Später, im zweiten Theile, wurde die Untersuchung verallgemeinert und überhaupt auf den Ausdruck

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + A_4 \cdot x^{m-4} + \cdots + A_m$$

oder $$B_0+B_1\cdot x+B_2\cdot x^2+B_3\cdot x^3+\cdots+B_m\cdot x^m$$

ausgedehnt, welcher Ausdruck jene 4 frühern als spezielle Fälle in sich schließt und allgemein eine ganze Funktion von x vom m ten Grade genannt wurde. — Noch später hat man dieselbe Untersuchung für die unter dem Namen der Sinus und Kosinus eingeführten unendlichen Reihen

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

und $$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

(welche auch trigonometrische Funktionen von x genannt worden sind) anwenden müssen, um eine Beurtheilung des Ganges der reelen Werthe dieser Funktionen für die stetig auf einander folgenden, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin, abnehmenden Werthe von x, möglich zu machen.

Um aber diese Zwecke zu erreichen, gingen wir von der Bemerkung aus, daß

$$\alpha+h, \qquad \alpha \qquad \text{und} \qquad \alpha-h$$

drei stetig auf einander folgende Werthe von x vorstellen, so oft h im Moment des Verschwindens gedacht ist. Alles kam darauf an, die zugehörigen Werthe

$$f(\alpha+h), \quad f(\alpha), \quad f(\alpha-h),$$

des Ausdrucks f(x), mag solcher die obige ganze Funktion von x, oder *Sin* x oder *Cos* x gewesen seyn, zu finden, und sie mit einander zu vergleichen.

In den eben angeführten Fällen gelang es allemal, f(x+h) [wenn man darunter versteht den Ausdruck, der aus f(x) hervorgeht, so oft durchaus x+h statt x gesetzt wird,] in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende (endliche oder unendliche) Reihe zu verwandeln, von der Form

$$f(x+h) = f(x)+f_1(x)\cdot h+f_2(x)\cdot h^2+f_3(x)\cdot h^3+\ldots\ldots;$$

und so ließ sich der Unterschied

$$1)\quad f(x+h)-f(x)$$

auf die Form

$$2)\quad f_1(x)\cdot h+f_2(x)\cdot h^2+f_3(x)\cdot h^3+\ldots\ldots$$

bringen, so daß dann für ein im Moment des Verschwindens gedachtes h, dieser Unterschied vorzüglich vom ersten Gliede $f_1(x)\cdot h$ abhieng (wenn solches, d. h. wenn $f_1(x)$ nicht Null ist).

53.

Auf diese Weise wurde der Gang der zu allen auf einander folgenden reelen Werthen von x, gehörigen Werthe der ganzen Funktion von x, nämlich von

$$f(x) = B_0+B_1\cdot x+B_2\cdot x^2+\ldots\ldots+B_m\cdot x^m$$

und eben so auch der trigonometrischen Funktionen

$$f(x) = \mathit{Sin}\,x \quad \text{und} \quad f(x) = \mathit{Cos}\,x,$$

mit Leichtigkeit nachgewiesen, so daß eingesehen wurde:

1) daß diese Ausdrücke f(x) mit x zugleich stetig sich ändern;

2) daß, während x fortwährend abnehmend gedacht wird, diese Ausdrücke f(x) ebenfalls fortwährend abnehmen, aber auch abwechselnd wachsen und wieder abnehmen, ja auf's neue wachsen, auf's neue abnehmen, und wiederum wachsen können; u. s. w. f.;

3) daß die Uebergänge der Werthe von f(x), vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven, nur durch Null hindurch möglich sind;

4) daß in dem Moment, wo einer dieser Ausdrücke f(x), vom Abnehmen zum Wachsen übergeht, ein (relativ) kleinster Werth desselben da ist, so wie, daß derjenige Werth von ihm ein (relativ) größter seyn müsse, wo dieselbe vom Wachsen zum Abnehmen übergeht;

5) daß diese Ausdrücke f(x) für alle die Werthe von x, einen solchen (relativ) größten oder kleinsten Werth annehmen (d. h. in der Reihe aller Werthe von f(x) einen Wendepunkt bilden), für welche das erste Glied des Unterschiedes in (N. 52. 2.) 0, (d. h. $f_1(x) = 0$), das zweite aber [d. h. $f_2(x)$] zu gleicher Zeit, im erstern Fall negativ, im andern dagegen positiv wird.

54.

Bei dem Bemühen, diese Ausdrücke f(x+h) in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln, hat sich ein, unter dem Namen des Taylor'schen Lehrsatzes für ganze Funktionen f(x), und für die, die Form der ganzen Funktionen habenden unendlichen Reihen *Sin* x, *Cos* x, hingestelltes Gesetz gebildet, nach welchem nämlich

$$f(x+h) = f(x) + \partial f(x) \cdot h + \partial^2 f(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f(x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

ist, wenn man nur $\partial f(x)$ aus f(x), $\partial^2 f(x)$ aus $\partial f(x)$, $\partial^3 f(x)$ aus $\partial^2 f(x)$, u. s. w. f., allgemein also $\partial^{n+1} f(x)$ aus $\partial^n f(x)$ dadurch entwickelt sich denkt, daß in diesen f(x), $\partial f(x)$, $\partial^2 f(x)$ 2c. $\partial^n f(x)$ (welches ganze Funktionen von x sind, oder doch, dieselbe Form habende unendliche Reihen), jedes Glied mit dem in ihm vorkommenden Exponenten von x multiplizirt, nachgehends aber der Exponent selbst um eine Einheit (1) vermindert wird.

Sucht man nun das eben (52.—54.) erwähnte so allgemein zu machen, daß es anwendbar wird, auf alle, den Buchstaben x enthaltende Ausdrücke, welche der unendlich vielen Formen sie auch haben mögen, so ist das Feld der Ableitungsrechnung und mit ihm das der Zurückleitungsrechnung (gewöhnlich Differenzialrechnung und Integralrechnung genannt) eröffnet.

Schluß-Anmerkung.

Es wird aber wiederholt bemerkt, daß diese Einleitung nur die in den beiden ersten Theilen dieses Systems gewonnenen Resultate, in so ferne sie für das hier folgende Werth haben, zusammenstellen sollte; daß daher jeder Leser, welcher die wissenschaftliche Entwikkelung derselben näher kennen lernen will, solche nicht aus dieser Einleitung selber schöpfen kann, sondern jene beiden Theile selbst darüber zu Rathe zu ziehen hat.

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Höhere Zahlenlehre.

Erstes Kapitel.

Die ersten Begriffe der Ableitungsrechnung und ihr Verhältniß zur Differenzialrechnung, so wie auch zur Methode der Grenzen.

Erste Abtheilung.

Die ersten Begriffe der Ableitungsrechnung. Der einfache Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz.

§. 1. Erklärung.

Um anzudeuten, daß in einem Ausdruck f $\left(\text{z. B. } \frac{x^3+bxy}{z-a^x}\right)$ der allgemeine, noch jeden Werth vorstellende Buchstabe x, oder y, oder z, ꝛc. vorkommt, sagt man: „der Ausdruck f sey eine Funktion des Veränderlichen x, oder des Veränderlichen y, oder des Veränderlichen z, ꝛc. ꝛc." — Will man andeuten, daß in demselben Ausdruck f die noch gänzlich unbestimmten Buchstaben x und y zugleich vorkommen, so sagt man: er sey eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y. Wird also gesagt: der Ausdruck f sey eine Funktion der beiden Veränderlichen x und z, so will dies nichts weiter sagen, als: in dem durch f vorgestellten Ausdruck kommen nicht bloß x und z zugleich vor, sondern letztere

sind auch noch ganz allgemein, so daß sie noch jeden Werth annehmen können. — Derselbe Ausdruck f kann aber auch eine Funktion der 3 Veränderlichen x, y und z, oder der 4 Veränderlichen x, y, z und b, oder der 5 Veränderlichen x, y, z, b und a genannt werden; u. s. w. f.

Das Wort Funktion bedeutet demnach nichts weiter als eine Zusammensetzung aus den veränderlichen (d. h. noch ganz unbestimmt gedachten) Buchstaben mit Ziffernausdrücken, oder mit Buchstaben, denen ein und derselbe bleibende Werth untergelegt gedacht wird, mittelst der 7 Operationen (von welchen letzteren, alle auf einmal oder nur eine einzige oder mehre und beliebig viele derselben vorkommen können). — Und variabel oder veränderlich heißt ein Buchstabe, wenn er noch jeden Werth vorstellen kann; konstant oder beständig dagegen wird er genannt, wenn er als durchaus nur einen einzigen bestimmten Werth vorstellend gedacht wird.

Anmerkung. Diese Benennungen rühren von dem in der Einleitung erwähnten Falle der Anwendung her. Denkt man sich nämlich z. B.

$$f = \frac{x^2 - ay + b}{az - b^x},$$

und wünscht man alle die Werthe von f zu betrachten, wie sie zu aufeinander folgenden, stetig geänderten Werthen von a unter der Voraussetzung gehören, daß die übrigen Buchstaben x, y, z, b dieselben Werthe behalten, die sie einmal haben, so würde man in Bezug auf diese Aufgabe, den Ausdruck f eine Funktion des Veränderlichen a, und x, y, z, b die Konstanten nennen.

Gleich darauf kann man aber wünschen, die zu den stetig geänderten Werthen von z, gehörigen Werthe von f zu betrachten, unter der Voraussetzung, daß x, y, a, b, unterdessen ihre Werthe behalten. Dann würde f eine Funktion des Veränderlichen z genannt werden, und x, y, a, b, hießen nun die Konstanten.

Und abermals kann man wünschen, die zu den stetig geänderten Werthen von a und zu gleicher Zeit stetig geänderten Werthen von x, gehörigen Werthe von f zu betrachten, unter der Bedingung, daß un-

terdessen die Werthe von y, z, b unverändert bleiben. Dann heißen letztere die Konstanten, und f selbst wird nun eine Funktion der beiden Veränderlichen a und x genannt. — U. s. w. f.

§. 2. Zusatz.

Ein Ausdruck f kann direkt, er kann aber auch als der Unbekannte in einer Bestimmungsgleichung gegeben seyn. Auf diesen Unterschied gründet man die Eintheilung der Funktionen in entwickelt gegebene und verwikkelt gegebene. Die Funktion f ist in dem erstern Fall schon bekannt, im andern Fall aber erst durch Auflösung der gegebenen Gleichung nach diesem Unbekannten f, zu finden; in beiden Fällen ist sie jedoch eine und dieselbe Zusammensetzung aus denselben Buchstaben und Ziffern, durch dieselben Operationen, in derselben Form, so daß dem Wesen nach zwischen einer entwikkelt gegebenen oder verwikkelt gegebenen Funktion nicht der geringste Unterschied statt findet.

Hat man aber z. B.

$$f = \frac{x^2 - ay + b}{az - bx} \quad \text{gegeben,}$$

so kann man unter f den Ausdruck $\frac{x^2 - ay + b}{az - bx}$ sich vorgestellt denken, und in so ferne ist er nun eine Funktion von a, b, x, y, z; von allen zugleich, von mehrern oder auch von einem einzigen und beliebigen dieser Buchstaben. Auf der andern Seite kann man sich aber auch z. B. unter x einen, aus f, y, z, a, b, zusammengesetzten Ausdruck vorgestellt denken (der durch Auflösung der Bestimmungsgleichung

$$f = \frac{x^2 - ay + b}{az - bx}$$

nach dem Unbekannten x, gefunden wird), welcher die Eigenschaft hat, daß er statt x gesetzt, die Gleichung

$$f = \frac{x^2 - ay + b}{az - bx}$$

identisch macht. Denkt man sich unter x diesen Ausdruck, so ist

auch x eine Funktion von f; und deshalb werden allemal f und x zugleich die von einander abhängigen Veränderlichen genannt; so zwar, daß der eine in Bezug auf den andern der unabhängige, der andere dagegen der von diesem abhängige Veränderliche heißt. Es heißt aber x der unabhängige und f der abhängige, so oft man sich unter f eine Zusammensetzung in x denkt; während, wenn x als eine Zusammensetzung aus f gedacht wird (die in dem gegenwärtigen Beispiel verwickelt gegeben ist, d. h. durch Auflösung der gegebenen Gleichung

$$f = \frac{x^2 - ay + b}{az - bx} \quad \text{nach } x,$$

noch gefunden werden muß), dann f der unabhängige, x dagegen der abhängige Veränderliche genannt wird.

Anmerkung. Ist $y = Sin\,x$, so ist y eine Funktion von x, und auch x eine Funktion von y. Um aber diese Funktion (d. h. diese Zusammensetzung mittelst der 7 Operationen) wirklich zu haben, und nicht bloße Zeichen dafür, muß man sich erinnern, daß $Sin\,x$ den Ausdruck $\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ vorstellt, (wo $i = \sqrt{-1}$ ist), welcher nun die wirkliche Funktion, d. h. die wirkliche Zusammensetzung ist. — Aus der Gleichung

$$y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

hat man nun abgeleitet die Gleichung

$$x = \frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1-y^2} + y \cdot i), ^{*)}$$

---

*) Setzt man $e^{xi} = z$, so ist $e^{-xi} = \frac{1}{z}$, und die Gleichung

$$y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

geht in

$$y = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

über, welche nach z eine quadratische wird, und aufgelößt

und dieser Ausdruck zur Rechten ist die wirkliche Zusammensetzung des x aus y, also die wirkliche Funktion von y, welche durch das Zeichen $\frac{1}{Sin}y$ (d. h. arc. $Sin\,y$) bloß (vorgestellt oder) angezeigt ist.

Wir glaubten aber durch dieses Beispiel noch einmal darauf aufmerksam machen zu müssen, daß eine Funktion nichts anders seyn kann, als irgend eine aus den 7 Operationen entstandene Verbindung oder Zusammensetzung von Zahlen, unter denen aber wenigstens eine noch ganz allgemein (d. h. veränderlich) seyn muß; wenn auch diese wirklichen Funktionen zuweilen durch kürzere Zeichen, wie z. B. $Sin\,x$, $Cos\,x$, $Tg\,x$, 2c. oder $\frac{1}{Sin}x$, $\frac{1}{Cos}x$, $\frac{1}{Tg}x$, 2c. vorgestellt sind.

§. 3. Erklärung.

Unter den verschiedenen Funktionen von x, sind früher schon herausgehoben worden die ganzen Funktionen von x, welche die Form haben

$$A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \cdots + A_m \cdot x^m,$$

wo $A_0, A_1, A_2, \cdots A_m$, beliebige von x unabhängige Koeffizienten sind.

Werden aber zwei solche ganze Funktionen durch einander dividirt, so nennt man den Quotienten

z. B. $$\frac{A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \cdots + A_m \cdot x^m}{B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot x^2 + \cdots + B_n \cdot x^n},$$

eine algebraische rationale gebrochene Funktion von x. — Sie heißt ächt gebrochen wenn $m < n$, sie heißt unächt gebrochen, wenn $m > n$ oder $m = n$ ist.

$$z = i \cdot y \pm \sqrt{1-y^2}$$

d. h. $$e^{xi} = \pm\sqrt{1-y^2} + y \cdot i,$$

also $$xi = log(\pm\sqrt{1-y^2} + y \cdot i)$$

und $$x = \frac{1}{i} \cdot log(\pm\sqrt{1-y^2} + y \cdot i)$$ wird.

Diese ganzen und gebrochenen Funktionen von x, werden ferner in den allgemeinern Begriff der **algebraischen rationalen** Funktionen von x zusammengefaßt, im Gegensatz zu den **algebraischen irrationalen Funktionen** von x, in denen, außer den 4 ersten elementaren Operationen, auch noch Wurzeln oder gebrochene Potenzen (des Veränderlichen x selbst oder) von rationalen Funktionen von x, vorkommen.

Die rationalen und irrationalen Funktionen von x, werden wieder in den Begriff der **algebraischen** Funktionen zusammengefaßt, im Gegensatz zu den **transzendenten** Funktionen von x, welche auch noch **allgemeine** Potenzen (d. h. Potenzen, deren Exponent (entweder der Veränderliche x selbst, oder doch) ein, x enthaltender Ausdruck ist), oder (künstliche oder natürliche) Logarithmen (des Veränderlichen selbst oder solcher Ausdrücke, welche von dem Veränderlichen abhängen) enthalten.

Anmerkung. Logarithmen **konstanter** Ausdrücke, oder allgemeine Potenzen, deren Exponent **konstant** ist, konstituiren also die transzendente Funktion noch nicht. — Weil aber die Sinus, Kosinus, Tangente, Kotangente der Veränderlichen, nichts anders als Zusammensetzungen aus Potenzen mit veränderlichem Exponenten sind, und weil die Bogen, die zu gegebenen veränderlichen Sinus, Kosinus, Tangenten oder Kotangenten gehören, nichts anders sind als Logarithmen veränderlicher Ausdrücke, so gehören alle trigonometrischen Funktionen zu den transzendenten.

§. 4. Lehrsatz.

Die einfachsten Zusammensetzungen (Funktionen) von x, sind die unmittelbaren Verbindungen desselben x, mit noch einem andern Buchstaben a, mittelst einer jeden einzelnen der Operationen; nämlich

1) $a \pm x$, $x \pm a$; 2) $a \cdot x$, $\frac{x}{a}$; 3) $\frac{a}{x}$;

4) x^a; 5) a^x; 6) $\sqrt[a]{x}$; 7) $\overset{a}{log}\, x$ d. h. $\frac{log\, x}{log\, a}$;

unter $log\, x$, $log\, a$, wie allemal, **natürliche** Logarithmen verstanden.

Von diesen sind die unter (N. N. 1. 2. 3. 4. und 6.) stehenden algebraisch; die übrigen beiden (N. N. 5. und 7.) dagegen transzendent. — Die unter (N. N. 1. 2. 3. 4. nnd 6.) enthaltenen einfachsten algebraischen Funktionen lassen sich aber alle wieder in der Form

$$A + B\cdot x^m \qquad \text{oder} \qquad B\cdot x^m + A$$

ausgedrückt erblicken, je nachdem man den Exponenten m bald 1, bald -1, bald a, bald $\frac{1}{a}$ gelten läßt, dabei aber statt A, bald 0, bald nicht Null, bald a, bald $-a$, so wie statt B, bald 1, bald -1, bald a, bald $\frac{1}{a}$ u. s. w. gesetzt sich denkt.*) Dieselbe Form enthält aber auch das bloße von x unabhängige A in sich, wenn $B = 0$ gesetzt wird.

Und jede Funktion von x ist 1) aus solchen in $A + B\cdot x^m$ enthaltenen einfachsten algebraischen Funktionen, und 2) aus den beiden einfachsten transzendenten Funktionen a^x, (b^x, c^x, ꝛc.) und $\log x$, und 3) aus, von x ganz unabhängigen Ausdrücken, mittelst der sieben Operationen (entweder aller oder mehrer, oder nur einer einzigen derselben) zusammengesetzt.

Beweis. Der erstere Theil des Lehrsatzes fällt von selbst in die Augen. Was aber den letztern Theil betrifft, so ergibt sich die Nothwendigkeit des behaupteten aus dem Umstand, daß wir in der Analysis keine andern Operationen betrachten, als die 3 direkten (Addition, Multiplikation und Potenzirung), und daß durch diese keine andern

---

*) Dieses sieht man am deutlichsten aus den Gleichungen

$$x \pm a = \pm a + 1\cdot x^1; \qquad a \pm x = a + (\pm 1)\cdot x^1;$$

$$a\cdot x = 0 + a\cdot x^1; \qquad \frac{x}{a} = 0 + \frac{1}{a}\cdot x^1;$$

$$\frac{a}{x} = 0 + a\cdot x^{-1}; \qquad x^a = 0 + 1\cdot x^a;$$

und $\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}} = 0 + 1\cdot x^{\frac{1}{a}}$.

indirekten gegeben sind, als die 4 bekannten (Subtraktion, Division, Radikation und Logarithmation), so daß also andere als Verbindungen aus den 7 Operationen nicht vorkommen können. Dabei sind die zusammengesetztesten Verbindungen doch endlich nur dadurch entstanden, daß man zuerst zwei Dinge mit einander verbindet, dann das was herauskommt, mit einem ähnlichen zusammengesetzten oder mit einem einfachern auf's neue verbindet, u. s. w. f., dergestalt, daß man jedesmal nur zwei Dinge miteinander verbunden hat; also daß auch der zusammengesetzteste Ausdruck nur eine Verbindung aus zweien andern seyn kann, während jeder dieser letztern, oder nur einer derselben, selber wieder zusammengesetzt ist; u. s. w. f.

Anmerkung. Obgleich $Sin\, x$ und $Cos\, x$ bereits zusammengesetzte (und zwar transzendente) Funktionen repräsentiren, nämlich die Funktionen (d. h. die Zusammensetzungen)

$$\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad \text{und} \quad \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},$$

so pflegt man doch häufig $Sin\, x$ und $Cos\, x$ noch zu den einfachsten (transzendenten) Funktionen zu zählen.

Dagegen sind

$$\frac{1}{Sin} y \text{ (d. h. arc. } Sin \cdot y), \quad \frac{1}{Cos} y \text{ (d. h. arc. } Cos \cdot y)$$

u. s. w. Repräsentanten (bloße Zeichen) für die ziemlich zusammengesetzten logarithmischen Funktionen

$$\frac{1}{i} \cdot log(\pm\sqrt{1-y^2} + y \cdot i) \quad \text{und} \quad \frac{1}{i} \cdot log(y \pm i \cdot \sqrt{1-y^2}),$$

wie solche aus den Gleichungen

$$y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad \text{oder} \quad y = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

durch die (pag. 60.) unten, beschriebene Auflösung derselben nach x, für den Bogen x sich ergeben.

§. 5. Lehrsatz und Erklärung.

Ist y eine beliebige Funktion von x, und stellt y_x sie selber, aber y_{x+h} dasjenige vor, was aus ihr wird, wenn überall in ihr $x+h$ statt x gesetzt wird, so läßt sich y_{x+h} allemal in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln, welche mit y_x anfängt.

Und in dieser Reihe bezeichnen wir den Koeffizienten des nächsten, nach y_x folgenden, mit h^1 affizirten Gliedes, durch ∂y_x oder bloß durch ∂y, und nennen solchen die Ableitung von y nach x. Und die Rechnung mit den Ableitungen nennt man die Ableitungsrechnung.

Beweis. I. Man betrachtet zunächst die einfachsten Funktionen, welche alle in den 3 Formen

$$A + B \cdot x^m, \quad a^x \quad \text{und} \quad \log x$$

enthalten sind.

1) Für
$$y = A + B \cdot x^m$$
folgt sogleich
$$y_{x+h} = A + B \cdot (x+h)^m.$$

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$(x+h)^m = x^m + m \cdot x^{m-1} \cdot h + m_2 \cdot x^{m-2} \cdot h^2 + \ldots\ldots;$$

folglich ist dasmal wirklich y_{x+h} eine solche nach ganzen Potenzen von h fortlaufende unendliche Reihe, nämlich:

$$y_{x+h} = y_x + m \cdot B \cdot x^{m-1} \cdot h + m_2 \cdot B \cdot x^{m-2} \cdot h^2 + \ldots;$$

und dabei ist die Ableitung

$$\partial y_x = mBx^{m-1}, \text{ oder } \partial(A+Bx^m)_x = mBx^{m-1}.$$

2) Ist ferner
$$y = a^x,$$
so ist
$$y_{x+h} = a^{x+h} = a^x \cdot a^h;$$

aber nach (E. 51. 2. oder E. 26. 1.) hat man

$$a^h = 1 + \frac{\log a}{1} \cdot h + \frac{(\log a)^2}{2!} \cdot h^2 + \frac{(\log a)^3}{3!} \cdot h^3 + \ldots\ldots;$$

folglich ist dasmal wiederum y_{x+h} eine solche nach ganzen Potenzen von h fortlaufende unendliche Reihe, nämlich:

$$y_{x+h} = y_x + \frac{a^x \cdot \log a}{1} \cdot h + \frac{a^x \cdot (\log a)^2}{2!} \cdot h^2 + \frac{a^x \cdot (\log a)^3}{3!} \cdot h^3 + \ldots;$$

und dabei ist die Ableitung $\partial y_x = a^x \cdot \log a$; oder $\partial(a^x)_x = a^x \cdot \log a$.

3) Und ist endlich
$$y = \log x$$

so ist $y_{x+h} = log(x+h) = log\,x + log\left(1+\frac{h}{x}\right)$;

aber nach (E. 51. 3. oder E. 38. 3.) hat man auch:

$$log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot h - \frac{1}{2x^2}\cdot h^2 + \frac{1}{3x^3}\cdot h^3 - \frac{1}{4x^4}\cdot h^4 + \cdots;$$

folglich ist wiederum y_{x+h} eine solche nach ganzen Potenzen von h fortlaufende unendliche Reihe, nämlich:

$$y_{x+h} = y_x + \frac{1}{x}\cdot h - \frac{1}{2x^2}\cdot h^2 + \frac{1}{3x^3}\cdot h^3 - \cdots;$$

und dabei ist die Ableitung $\partial y_x = \frac{1}{x}$; oder $\partial(log\,x)_x = \frac{1}{x}$.

II. Weil aber jede zusammengesetzte Funktion y_x nothwendig aus beliebigen dieser 3 einfachsten Funktionen z_x, u_x, v_x, w_x, 2c. 2c. und Konstanten, durch die 7 Operationen zusammengesetzt ist; weil ferner y_{x+h} genau dieselbe Zusammensetzung aus

$$z_{x+h},\ u_{x+h},\ v_{x+h},\ w_{x+h},\ \text{2c.}$$

seyn muß, in so ferne sie aus jener y_x bloß dadurch hervorgeht, daß überall $x+h$ statt x gesetzt wird; und weil endlich

$$z_{x+h},\ u_{x+h},\ v_{x+h},\ w_{x+h},\ \text{2c.}$$

dem eben geführten Beweise zufolge, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihen werden müssen, so ist y_{x+h} nothwendig genau so aus diesen Reihen zusammengesetzt, wie y_x aus z_x, u_x, v_x, w_x, 2c. zusammengesetzt war; folglich, (E. 48.) zufolge, allemal selber wieder eine solche Reihe, da die dort erwähnten Ausnahmen hier deshalb nicht statt finden können, weil hier x ausdrücklich ein Veränderlicher, d. h. ein allgemeiner, noch keinen bestimmten Werth habender Buchstabe ist, also die speziellen Werthe, welche diese Ausnahmen veranlassen, hier durchaus nicht gedacht werden sollen und dürfen.

III. Ist aber identisch

$$y_{x+h} = A_0 + A_1\cdot h + A_2\cdot h^2 + A_3\cdot h^3 + \cdots,$$

so gilt diese Identität für jeden Werth von h, also auch für $h = 0$, so daß die dann hervorgehende Gleichung

$$y_x = A_0$$

noch identisch, also das erste Glied A_0 dieser, für y_{x+h} existirenden

Reihe, identisch mit y_x seyn muß, während der Koeffizient A_1 noch durch ∂y_x oder ∂y bezeichnet seyn soll.

Anmerkung. In den Anwendungen der hier in Rede stehenden allgemeinen Untersuchungen ergeben sich aber die hier eben erwähnten Ausnahmsfälle für spezielle Werthe von x von selbst, wenn man in y_x, oder in einem der Koeffizienten der Reihe, solche Werthe für x genommen sich denkt, für welche diese Ausdrücke eine im Kalkul nicht zulässige Form (z. B. $\frac{1}{0}$ oder $\log 0$, oder ꝛc.) erhalten. — In solchen Fällen bleibt auch nichts anders übrig, als für diese besondern Werthe von x, die Formen von y_{x+h} noch einmal direkt aufzusuchen.

§. 6. Zusatz.

Aus diesem Beweise ist zugleich noch mit hervorgegangen:

1) Es ist

$$\partial(A+B\cdot x^m)_x = mBx^{m-1},$$

was auch A bedeuten mag, wenn nur A, B und m, von x unabhängig bleiben; also auch für $A=0$; daher auch noch

$$\text{I.}\quad \partial(Bx^m)_x = mBx^{m-1},$$

welcher Ausdruck zur Rechten erhalten wird, wenn man die Funktion Bx^m mit ihrem Exponenten m multiplizirt und dann 1 vom Exponenten subtrahirt. — Für $B=1$, $m=1$, gibt aber diese Formel noch

$$\text{I. 1.}\quad \partial(x)_x = 1 \quad \text{oder} \quad \partial x = 1.\text{*)}$$

*) Betrachtet man nämlich x oder $1\cdot x^1$ als Funktion von x, so kann sie durch $(x)_x$ bezeichnet werden, während $(x)_{x+h}$ das bezeichnet, was aus ihr wird, wenn $x+h$ statt x gesetzt wird. Man hat dann, weil $(x)_x = x$, $(x)_{x+h} = x+h$ ist, offenbar

$$(x)_{x+h} = (x)_x + 1\cdot h + 0\cdot h^2 + 0\cdot h^3 + \cdots\cdots$$

und der Koeffizient von h^1, welcher durch $\partial(x)_x$ oder bloß durch ∂x bezeichnet worden, ist demnach ofenbar $= 1$.

2) Es ist

$$\text{II.}\quad \partial(a^x)_x = a^x \cdot log\, a,$$

also auch

$$\text{II. 1.}\quad \partial(e^x) = e^x,$$

so oft e^x als (eindeutige) natürliche Potenz gedacht ist, weil dann 1 statt $log\, e$ genommen werden muß.

3) Es ist

$$\text{III.}\quad \partial(log\, x)_x = \frac{1}{x}.$$

§. 7. Zusatz.

1) Ist die gegebene Funktion y oder y_x, für jeden Werth von x nur eindeutig (besser, wie Euler schon gefühlt hat, einförmig), so hat auch y_{x+h} nur einen Werth, und daher existirt auch nur eine einzige nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe, welche $= y_{x+h}$ ist; weil jede andere ihr gleich wäre für jedes h, also auch in den einzelnen Koeffizienten dieselbe seyn müßte (E. 18. 1.). — Also existirt dann auch nur eine einzige (eine einförmige) Ableitung ∂y_x.

2) Ist dagegen die gegebene Funktion y oder y_x, m deutig für jeden Werth von x, (d. h. mförmig), so wird auch y_{x+h} mförmig seyn; es werden nun m Reihen nach h existiren, welche nach und nach die m Formen von y_{x+h} vorstellen. — Diese m Reihen können sich aber vielleicht nur durch die m Förmigkeit ihres ersten Gliedes y von einander unterscheiden, und dann ist die Ableitung ∂y_x für alle m Formen

---

*) $log\, a$ bedeutet nämlich allemal den natürlichen Logarithmen von a, dessen Basis

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = 2{,}718\cdots$$

ist, und welcher jeden Ausdruck z vorstellt, der $e^z = a$ macht. Also, weil $e^1 = e$ ist, $log\, e = 1$.

von y_x dieselbe und nur einförmig, und dies ist der Fall bei (§. 6. III.) nämlich $\partial(\mathit{log}\,x)_x = \frac{1}{x}$; — oder es sind diese m Reihen auch noch in ihren folgenden Gliedern von einander verschieden, und dann kann zu einem m förmigen y_x auch ein m förmiges ∂y_x gehören. Dies letztere ist der Fall, sowohl in

$$\partial(A+Bx^m)_x = \partial(Bx^m)_x = mBx^{m-1},$$

als auch in

$$\partial(a^x)_x = a^x \cdot \mathit{log}\,a,$$

wenn die Potenz x^m nicht eine (positive oder negative) ganze Potenz ist.

3) Um aber in diesem letzteren Falle zu wissen, welche Werthe von ∂y_x zu gegebenen Werthen von y_x gehören, wenn y_x eine der einfachsten Funktionen $A+Bx^m$ oder a^x ist, und m nicht eine ganze Zahl, so beachte man, daß für jeden Werth von m

$$(x+h)^m = x^m \cdot \left(1+\frac{h}{x}\right)^m$$

$$= x^m \cdot \left[1 + m \cdot \frac{h}{x} + m_2 \cdot \frac{h^2}{x^2} + \cdots\right]$$

ist, so daß also

$$\partial(x^m)_x = mx^m \cdot \frac{1}{x} = \frac{m \cdot x^m}{x} \qquad \text{wird;}$$

oder

$$1) \quad \partial(A+Bx^m)_x = \partial(Bx^m)_x = mBx^m \cdot \frac{1}{x},$$

wo x^m links und rechts einen und denselben Werth vorstellt (so daß man also für $\partial(Bx^m)_x$ denjenigen Werth von mBx^{m-1} nehmen muß, welcher $= mB\frac{x^m}{x}$ ist, unter x^m den in der gegebenen Funktion genommenen Werth von x^m gedacht).

Ferner hat man

$$a^x = e^{x \cdot log\, a},$$

also $a^{x+h} = e^{(x+h) \cdot log\, a} = e^{x \cdot log\, a} \cdot e^{h \cdot log\, a}$.

Aber (nach E. 51. 1.) ist

$$e^{h \cdot log\, a} = 1 + log\, a \cdot h + \cdots;$$

folglich

$$\partial(a^x)_x = \partial(e^{x \cdot log\, a})_x = e^{x \cdot log\, a} \cdot log\, a.$$

Oder

$$2)\quad \partial(a^x)_x = a^x \cdot log\, a,$$

aber rechts unter *log* a jedesmal denjenigen der unendlich vielen Werthe von *log* a verstanden, welcher in $e^{x \cdot log\, a}$ genommen werden muß, um gerade den Werth von a^x, $= e^{x \cdot log\, a}$ zu erhalten, welcher in der Gleichung

$$\partial(a^x)_x = a^x \cdot log\, a$$

unter dem Zeichen a^x links und rechts gedacht wird.

Deshalb ist

$$3)\quad \partial(e^x)_x = e^x,$$

weil e^x (als natürliche Potenz genommen, wie dies allemal so gedacht wird) nur eindeutig ist, und denjenigen der Werthe der allgemeinen Potenz e^x oder $e^{x \cdot log\, e}$ vorstellt, welcher für $log\, e = 1$ sich ergibt.

4) Nie aber gehören zu zwei einander vollkommen identischen Funktionen y und z von x (die nämlich für jeden Werth von x, also auch, wenn $x+h$ statt x gesetzt wird, während h ganz beliebig gedacht ist, vollkommen identisch sind) zwei verschiedene Ableitungen ∂y und ∂z.

Denn so wie

$$y_x = z_x \quad \text{und} \quad y_{x+h} = z_{x+h}$$

vollkommen identisch sind, so sind die Reihen für y_{x+h} und für z_{x+h} für jeden Werth von h, und daher auch die Koeffizienten

ihrer einzelnen Glieder, also auch $\partial y_x = \partial z_x$ vollkommen identisch, so auch daß, wenn ∂y_x mförmig seyn sollte, ∂z nothwendig dieselben mFormen repräsentiren müßte*).

5) Ist eine Funktion y von x identisch 0 oder identisch A (unter A ein von x unabhängiger, d. h. nach x konstanter Ausdruck gedacht) für jeden Werth von x, so ist entweder

$$y_x = 0 \quad \text{und} \quad y_{x+h} = 0;$$

oder es ist

$$y_x = A \quad \text{und} \quad y_{x+h} = A;$$

also sind dann in beiden Fällen die Summe aller, die Differenz $y_{x+h} - y_x$ vorstellenden Glieder der nach h fortlaufenden Reihe, für jeden Werth von h identisch 0, mithin auch alle die einzelnen Koeffizienten identisch 0, d. h. auch $\partial y_x = 0$ identisch.

Anmerkung. Es ist z. B.

$$\frac{x^4-1}{x-1} = x^3+x^2+x+1;$$

also hat man, wenn unter y die Differenz

$$\frac{x^4-1}{x-1} - x^3 - x^2 - x - 1$$

verstanden wird, sogleich eine Funktion y von x, welche identisch für jeden Werth von x, Null ist. Setzt man nun hier x+h statt x, so hat man

$$y_{x+h} = \frac{(x+h)^4-1}{x+h-1} - (x+h)^3 - (x+h)^2 - (x+h) - 1,$$

---

*) Man muß aber wohl merken, daß dieses nur gilt, wenn $y_x = z_x$ ist, für jeden Werth von x.

Denn man sieht leicht ein, daß, wie auch y_x und z_x gegeben seyn mögen, man jedesmal nach dem bestimmten Werthe von x fragen kann, welcher der Gleichung $y_x = z_x$ genügt. — Wenn aber auch für diesen Werth von x, $y_x = z_x$ ist, so ist dann doch noch nicht $y_{x+h} = z_{x+h}$ für jeden Werth von h, also kann der obige Beweis nun nicht mehr geführt werden.

welches noch identisch Null ist, nicht bloß für jeden Werth von x, sondern auch für jeden Werth von h; und entwickelt man dieses y_{x+h} nach ganzen Potenzen von h, so müssen die einzelnen Glieder der Reihe und namentlich der durch ∂y_x bezeichnete erste Koeffizient, identisch Null seyn. — Es ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$(x+h)^4-1=(x^4-1)+4x^3\cdot h+6\cdot x^2\cdot h^2+\cdots$$

wird daher solche Reihe durch $(x-1)+h$ dividirt, so erhält man

$$\frac{x^4-1}{x-1}+\left[\frac{4x^3}{x-1}-\frac{x^4-1}{(x-1)^2}\right]\cdot h+\cdots$$

Ferner hat man

$$(x+h)^3=x^3+3x^2\cdot h+\cdots$$

$$(x+h)^2=x^2+2x\cdot h+\cdots$$

$$x+h\;=x+1\cdot h;$$

also ist der Koeffizient von h^1 in y_{x+h}, d. h. die Ableitung

$$\partial y_x,=\frac{4x^3}{x-1}-\frac{x^4-1}{(x-1)^2}-3x^2-2x-1,$$

und solche nothwendig identisch Null, wovon man sich auch a posteriori überzeugt, wenn man das Ganze unter den Nenner $(x-1)^2$ bringt, wo sich im Zähler sogleich alles weghebt.*)

Es mag aber überhaupt das bisher Gesagte noch durch einige Beispiele erläutert werden.

---

*) Mag y eine beliebige Funktion von x seyn, z. B.

$$y=x^4-4x^2+1,$$

so kann man allemal den Werth von x suchen, welcher $y=0$ d. h. $x^4-4x^2+1=0$ macht. Für diesen Werth von x ist dann freilich $y_x=0$, aber eben deshalb ist dieses y nicht mehr $=0$, wenn ein anderer Werth $x+h$, der, wegen des beliebigen h, noch ganz beliebig ist, und jeden Werth vorstellt, statt x gesetzt wird; also ist nicht $y_{x+h}=0$, also sind auch nun nicht nothwendig die einzelnen Koeffizienten $=0$, daher auch nicht nothwendig $\partial y=0$, weder identisch für jeden Werth von x, noch selbst für denjenigen Werth von x, welcher $y=0$ machte.

Beispiel 1. Ist $y = \sqrt[m]{x-a} = (x-a)^{\frac{1}{m}}$, so ist

$$y_{x+h} = (x+h-a)^{\frac{1}{m}} = [(x-a)+h]^{\frac{1}{m}};$$

also nach dem binomischen Lehrsatze:

$$y_{x+h} = (x-a)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}\cdot(x-a)^{\frac{1}{m}-1}\cdot h + \frac{1}{m}\cdot\frac{1-m}{2m}\cdot(x-a)^{\frac{1}{m}-2}\cdot h + \cdots$$

$$= \sqrt[m]{x-a} + \frac{\sqrt[m]{x-a}}{m(x-a)}\cdot h - \frac{m-1}{2m^2}\cdot\frac{\sqrt[m]{x-a}}{(x-a)^2}\cdot h^2 + \cdots$$

$$= \sqrt[m]{x-a} + \frac{1}{m\sqrt[m]{(x-a)^{m-1}}}\cdot h - \frac{m-1}{2m^2\cdot\sqrt[m]{(x-a)^{2m-1}}}\cdot h^2 + \cdots,$$

welches die nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe ist, so daß dasmal der durch ∂y_x oder $\partial(\sqrt[m]{x-a})_x$ bezeichnete Koeffizient

$$= \frac{1}{m\cdot\sqrt[m]{(x-a)^{m-1}}} = \frac{\sqrt[m]{x-a}}{m(x-a)} \quad \text{ist.} —$$

Diese **Ableitung** ist, wie man sieht, mit y zugleich $m$deutig ($m$förmig) und die frühern Untersuchungen (des §. 7. N. 3.) haben gelehrt, welche der m verschiedenen Formen (=Werthe) von ∂y_x zu einer bestimmten der m Formen (=Werthe) von y gehört.

Für den speziellen Werth a von x, nehmen aber die Koeffizienten dieser Reihe die Form $\frac{1}{0}$ an, und dies bedeutet, daß **für diesen speziellen Werth von x**, diese nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe nicht Statt hat. Für diesen speziellen Werth $x = a$, findet sich aber direkt

$$y_{a+h} = (a-a+h)^{\frac{1}{m}} = h^{\frac{1}{m}},$$

welches Resultat in der Form

$$0 + 1\cdot h^{\frac{1}{m}} + 0\cdot h^1 + \cdots$$

gedacht, als eine, gebrochene Potenzen von h enthaltende Reihe angesehen werden kann.*)

Beispiel 2. Wäre

$$y = \sqrt[3]{(x-a)^5} = (x-a)^{\frac{5}{3}},$$

also
$$y_{x+h} = [(x-a)+h]^{\frac{5}{3}}$$

gewesen, so hätte man nach dem binomischen Lehrsatze

$$y_{x+h} = (x-a)^{\frac{5}{3}} + \tfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}} \cdot h + \frac{5}{9 \cdot (x-a)^{\frac{1}{3}}} \cdot h^2 + \ldots\ldots$$

gehabt, welches die verlangte Reihe ist; so daß $\partial y_x = \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}$ wird, in welcher Reihe aber, für $x = a$, der Koeffizient ∂y_x von h noch nicht, sondern erst der Koeffizient von h^2 die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, wodurch jedoch wiederum angedeutet wird, daß in diesem Ausnahmsfall, die nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe nicht mehr Statt findet. Direkt ergibt sich aber für $x = a$,

$$y_{a+h} = h^{\frac{5}{3}} = 0 + 0 \cdot h^1 + 1 \cdot h^{\frac{5}{3}}.$$

Beispiel 3. Ist $y = (x-b)^n \cdot \sqrt[m]{(x-a)}$, so daß

$$y_{x+h} = [(x-b)+h]^n \cdot \sqrt[m]{(x-a)+h}$$

wird, so wird für $x = a$ auf direktem Wege

$$y_{a+h} = [(a-b)+h]^n \cdot h^{\frac{1}{m}}$$

---

*) Hätte man $y = Ax^n + B(x-a)^{\frac{1}{m}}$ genommen, so wäre für $x=a$

$$y_{a+h} = A(a+h)^n + Bh^{\frac{1}{m}}$$

geworden, d. h. eine Reihe, welche nur eine einzige gebrochene Potenz, sonst aber lauter ganze Potenzen von h enthält.

d. h. $y_{a+h} = (a-b)^n \cdot h^{\frac{1}{m}} + n(a-b)^{n-1} \cdot h^{1+\frac{1}{m}} + n_2 \cdot (a-b)^{n-2} \cdot h^{2+\frac{1}{m}} + \cdots$,

welches eine nach gebrochenen Potenzen von h fortlaufende Reihe ist, während für jeden andern Werth von x, y_{x+h} allemal eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe bleibt, die man auch erhält, sobald man die für $[(x-b)+h]^n$ und für $[(x-a)+h]^{\frac{1}{m}}$ nach dem binomischen Lehrsatze sich ergebenden, nach ganzen Potenzen von h fortlaufenden Reihen mit einander multiplizirt. — Die zwei ersten Glieder dieser Reihe werden aber

$$(x-b)^n \cdot \sqrt[m]{x-a} + \left[n(x-b)^{n-1} \cdot \sqrt[m]{x-a} + \frac{(x-b)^n \sqrt[m]{x-a}}{m(x-a)} \right] \cdot h;$$

so daß also dasmal

$$\partial y_x = n(x-b)^{n-1} \cdot \sqrt[m]{x-a} + \frac{(x-b)^n \cdot \sqrt[m]{x-a}}{m(x-a)} \quad \text{wird.}$$

Beispiel 4. Ist $y = log(x-a)$, so ist

$$y_{x+h} = log[(x-a)+h]$$

$$= log\left[(x-a) \cdot \left(1 + \frac{h}{x-a}\right)\right] = log(x-a) + log\left(1 + \frac{h}{x-a}\right)$$

d. h. nach (E. 51. N. 3.):

$$y_{x+h} = log(x-a) + \frac{1}{x-a} \cdot h - \frac{1}{2(x-a)^2} \cdot h^2 + \cdots;$$

also $\quad \partial y_x = \frac{1}{x-a}.$

Für $x = a$ wird aber direkt

$$y_{a+h} = log\, h,$$

welches weder eine nach ganzen, noch eine nach gebrochenen Potenzen von h fortlaufende Reihe gibt.

Uebrigens ist hier y_x unendlich-vielförmig, und doch die Ableitung ∂y_x nur einförmig.

Beispiel 5. Ist $y = \frac{x^m}{(x-a)^n}$,

so ist $\quad y_{x+h} = \frac{(x+h)^m}{[(x-a)+h]^n}.$

Und für $x=0$ wird direkt $y_{0+h}=\frac{h^m}{(-a+h)^n}$, welches keine nach ganzen positiven Potenzen von h fortlaufende Reihe gibt, so oft m eine negative oder gebrochene Zahl ist. — Eben so wird für $x=a$ direkt

$$y_{a+h}=\frac{(a+h)^m}{h^n},$$

welches keine nach ganzen positiven Potenzen von h fortlaufende Reihe geben kann (weil sie mit h^{-n} anfängt), so oft n positiv ist. — Diese Ausnahmsfälle abgerechnet, wird aber im Allgemeinen d. h. für jeden andern Werth von x, y_{x+h} in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt werden, wenn man die aus $(x+h)^m$ und $[(x-a)+h]^n$ nach dem binomischen Lehrsatze hervorgehenden Reihen, durch einander dividirt. Die beiden ersten Glieder werden dann

$$\frac{x^m}{(x-a)^n}+\left[\frac{mx^{m-1}}{(x-a)^n}-\frac{nx^m}{(x-a)^{n+1}}\right]\cdot h;$$

so daß für diesesmal die Ableitung

$$\partial y_x=\frac{mx^{m-1}}{(x-a)^n}-\frac{nx^m}{(x-a)^{n+1}} \quad \text{wird.}$$

Beispiel 6. Ist $y=(x-a)^m\cdot log(x-a)$,

so ist $$y_{x+h}=[(x-a)+h]^m\cdot log[(x-a)+h].$$

Die für y_{x+h} existirende, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe ergibt sich nun, wenn man die für $[(x-a)+h]^m$ nach dem binomischen Lehrsatze zu erhaltende Reihe, mit der im (Beisp. 4.) für $log[(x-a)+h]$ erhaltenen, multiplizirt. Die beiden ersten Glieder dieser Reihe werden dann

$$(x-a)^m\cdot log(x-a)+[m(x-a)^{m-1}\cdot log(x-a)+(x-a)^{m-1}]\cdot h,$$

so daß diesesmal die Ableitung

$$\partial y_x=m(x-a)^{m-1}\cdot log(x-a)+(x-a)^{m-1}$$

wird.

Hier ist y, wegen des Logarithmen offenbar unendlich vielförmig, und zugleich auch ∂y_x, weil dasmal auch in dieser Ableitung ∂y_x der Logarithme vorkommt. (Man vergleiche hiermit das Beispiel 4.)

Für $x = a$ wird dagegen direkt

$$y_{a+h} = h^m \cdot \log h,$$

welches weder eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe, noch eine Reihe ist, die negative oder gebrochene Potenzen von h enthielte.

Beispiel 7. Ist $y = (x-a)^x$,

so ist $y_{x+h} = [(x-a)+h]^{x+h} = [(x-a)+h]^x \cdot [(x-a)+h]^h$.

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$[(x-a)+h]^x = (x-a)^x + x\cdot(x-a)^{x-1}\cdot h + \cdots$$

und nach (E. 51. 2.)

$$[(x-a)+h]^h = 1 + \log[(x-a)+h]\cdot h + \cdots,$$

während wiederum nach (Beisp. 4.)

$$\log[(x-a)+h] = \log(x-a) + \frac{1}{x-a}\cdot h + \cdots$$

wird, so daß die beiden ersten Glieder der für y_{x+h} statt findenden Reihe,

$$(x-a)^x + [x(x-a)^{x-1} + (x-a)^x \cdot \log(x-a)]\cdot h$$

seyn werden, und die Ableitung

$$\partial y_x = x(x-a)^{x-1} + (x-a)^x \cdot \log(x-a)$$

ist, wo $y_x = (x-a)^x = e^{x\cdot\log(x-a)}$ mit ∂y_x zugleich, unendlich-vielförmig ist.

Für $x=a$ dagegen wird direkt

$$y_{a+h} = h^{a+h} = h^a \cdot h^h,$$

welches weder eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe, noch eine Reihe werden kann, welche negative oder gebrochene Potenzen von h enthielte. *)

---

*) Es könnte zwar scheinen als gäbe h^h, weil solches nach (E. 51. 1.)

$$= 1 + \frac{\log h}{1}\cdot h + \frac{(\log h)^2}{2!}\cdot h^2 + \frac{(\log h)}{3!}\cdot h^3 + \cdots$$

wird, eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe. Man

§. 8. Zusatz.

Allgemeine Regel zur Auffindung der Ableitungen.

Man findet also die Ableitung ∂y_x nach x, von einer Funktion y von x, wenn man y_{x+h} nach ganzen Potenzen von h in eine Reihe verwandelt, und dann den Koeffizienten von h^1 statt ∂y_x nimmt; weil gerade dieser Koeffizient dasjenige ist, was man durch ∂y zu bezeichnen und „Ableitung" zu nennen sich vorgenommen hat.

Aber eben weil

$$y_{x+h} = y_x + \partial y_x \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots\cdot$$

ist, wo A_2, A_3, 2c. die übrigen Koeffizienten vorstellen, so hat man noch, wenn y_x subtrahirt, und nachher durch h dividirt wird:

$$\frac{y_{x+h} - y_x}{h} = \partial y_x + A_2 \cdot h + A_3 \cdot h^2 + \cdots\cdot$$

welches, wenn man jetzt 0 statt h setzt:

$$\partial y_x = \frac{y_{x+h} - y_x}{h} \quad (\text{für } h = 0)$$

liefert, wenn nur in dem Ausdruck zur Rechten, erst nach geschehener Division mit h, wodurch eben die Reihe

$$\partial y_x + A_2 \cdot h + A_3 \cdot h^2 + \cdots$$

sich ergibt, 0 statt h gesetzt wird;*) d. h. man findet die

übersehe aber nicht, daß in den Koeffizienten selber wieder h, und zwar *log* h vorkommt, welcher nicht wieder in eine Reihe nach h entwickelt werden kann.

*) Wollte man in dem Ausdruck $\frac{y_{x+h} - y_x}{h}$, noch ehe man den Nenner h (durch wirkliche Division) fortgeschafft hat, 0 statt h setzen, so würde er in $\frac{y_{x+0} - y_x}{h}$ d. h. in $\frac{0}{0}$ übergehen, welche Form in der Rechnung durchaus nicht erscheinen darf, und nur erscheint, wenn man Substitutionen zur Unzeit vornimmt.

Ableitung ∂y_x nach x, wenn man in y_x zuerst $x+h$ statt x setzt, dann y_x von diesem y_{x+h} subtrahirt, die Differenz durch h wirklich wegdividirt, und nachgehends $h = 0$ setzt.

Beispiel 1. Ist z. B. $y = Sin\, x$, so wird

$$\partial y_x = \frac{Sin(x+h) - Sin\, x}{h} \quad (\text{für } h = 0).$$

Nun ist aber

$$Sin(x+h) = Sin\, x \cdot Cos\, h + Cos\, x \cdot Sin\, h;$$

also

$$Sin(x+h) - Sin\, x = Cos\, x \cdot Sin\, h - Sin\, x \cdot (1 - Cos\, h),$$

und

$$\partial y_x = Cos\, x \cdot \frac{Sin\, h}{h} - Sin\, x \cdot \frac{1 - Cos\, h}{h} \quad (\text{für } h = 0).$$

Weil aber nach (E. 51. N. 5.):

$$\frac{Sin\, h}{h} = 1 - \frac{h^2}{3!} + \cdots,$$

also für $h = 0$, $\frac{Sin\, h}{h} = 1$ ist, während nach (E. 51. N. 4.)

$$\frac{1 - Cos\, h}{h} = \frac{h}{2!} - \frac{h^3}{4!} + \cdots,$$

also für $h = 0$, $\frac{1 - Cos\, h}{h} = 0$ wird, so folgt zuletzt

$$\partial y_x = Cos\, x, \text{ wenn } y = Sin\, x. \text{*)}$$

---

*) Da man hier doch die unter $Sin\, h$ und $Cos\, h$ vorgestellten Reihen zu Hülfe nehmen mußte, so wäre es hier einfacher gewesen, in

$$Sin(x+h) = Sin\, x \cdot Cos\, h + Cos\, x \cdot Sin\, h$$

statt $Sin\, h$ und $Cos\, h$ die Reihen selbst zu substituiren, das Ganze nach Potenzen von h zu ordnen, also $Sin(x+h)$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln und dann den Koeffizienten von h^1 statt ∂y_x zu nehmen.

Beispiel 2. Ist $y = \frac{x^2+1}{x+1}$, so ist

$$\partial y_x = \frac{\frac{(x+h)^2+1}{x+h+1} - \frac{x^2+1}{x+1}}{h} \quad (\text{für } h = 0).$$

Bringt man hier den Zähler

$$\frac{(x^2+1)+2x\cdot h+h^2}{(x+1)+h} + \frac{x^2+1}{x+1}$$

unter gleiche Benennung, so erhält man

$$\frac{(x^2+2x-1)\cdot h+(x+1)\cdot h^2}{(x+1)(x+1+h)};$$

und dividirt man durch h fort, so erhält man

$$\frac{(x^2+2x-1)+(x+1)h}{(x+1)(x+1+h)},$$

welches für $h = 0$,

$$\partial y_x = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \quad \text{liefert.}$$

Anmerkung. Damit jedoch der Begriff der Ableitung, und die Art und Weise wie solche jedesmal gefunden wird, noch deutlicher und entschiedener in die Sinne fallen mögen, sey hier noch nachstehendes erörtert.

Der Ausdruck a^x ist eine Funktion von x, aber auch eine Funktion von a. — Man kann daher statt a setzen $a+h$, dann $(a+h)^x$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt sich denken, und der Koeffizient von h^1 ist dann der durch

$$\partial(a^x)_a \quad \text{bezeichnete,}$$

und die Ableitung von a^x nach a, genannte. — Und eben so gut kann man $x+h$ statt x setzen, und a^{x+h} in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt sich denken, und der Koeffizient von h^1 ist dann der durch

$$\partial(a^x)_x \quad \text{bezeichnete}$$

und die Ableitung von a^x nach x, genannte. Man hat also nach (§.6.)

$$\partial(a^x)_a = x\cdot a^{x-1},$$

und

$$\partial(a^x)_x = a^x\cdot log\, a.$$

Auf diese Weise findet man

$$\partial(a+bx^m)_x = \frac{[a+b(x+h)^m]-[a+bx^m]}{h} = mb \cdot x^{m-1},$$
für $h = 0$

$$\partial(a+bx^m)_m = \frac{[a+b \cdot x^{m+h}]-[a+bx^m]}{h} = bx^m \cdot \log x,$$
für $h = 0$

$$\partial(a+bx^m)_b = \frac{[a+(b+h) \cdot x^m]-[a+bx^m]}{h} = x^m,$$
für $h = 0$

und

$$\partial(a+bx^m)_a = \frac{[a+h+bx^m]-[a+bx^m]}{h} = 1.$$
für $h = 0$

Und man hat den Ausdruck $a+bx^m$ im ersten Fall als eine Funktion von x, im andern als eine Funktion von m, im dritten als eine Funktion von b, im letzten endlich als eine Funktion von a angesehen, während jedesmal die drei übrigen Buchstaben als von dem Veränderlichen unabhängig (nach ihm konstant) gedacht worden sind.

§. 9. Lehrsätze.

Sind y und z Funktionen von x, so ist allemal

$$\text{I.} \quad \partial(y_x \pm z_x)_x = \partial y_x \pm \partial z_x;$$

d. h. die Ableitung einer Summe oder einer Differenz wird gefunden, wenn man von jedem Summanden die Ableitung nimmt, oder von jedem Gliede, und diese wiederum addirt oder subtrahirt.

Und ist y nicht, sondern bloß z eine Funktion von x, so hat man allemal

$$\text{II.} \quad \partial(y+z_x)_x = \partial z_x;$$

d. h. die Ableitung einer Summe mit einem konstanten Summanden wird noch nach der vorhergehenden Regel gefunden, wenn man nur die Ableitung des konstanten y, dem (§. 7. N. 5.) gemäß, der Null gleich nimmt.

Ist ferner y eine beliebige Funktion von x, und A von x unabhängig (nach x konstant), so ist

$$\text{III.}\quad \partial(A\cdot y_x)_x = A\cdot\partial y_x;$$

d. h. die Ableitung des Produkts $A\cdot y_x$ (als Funktion von x gedacht) wird gefunden, wenn man bloß die Ableitung des veränderlichen Faktors y nimmt, den konstanten Faktor A aber unverändert läßt.

Beweis ad I. Denn es ist nach (§. 8.)

$$\partial(y_x+z_x) = \frac{(y_{x+h}+z_{x+h})-(y_x+z_x)}{h}$$
$$= \frac{y_{x+h}-y_x}{h}+\frac{z_{x+h}-z_x}{h}$$

für $h=0$; also $=\partial y_x+\partial z_x$.

Beweis ad II. Eben so ist

$$\partial(y+z_x)_x = \frac{(y+z_{x+h})-(y+z_x)}{h} = \frac{z_{x+h}-z_x}{h}$$

für $h=0$; also $=\partial z_x$.

Beweis ad III. Es ist nach (§. 8.)

$$\partial(A\cdot y_x)_x = \frac{A\cdot y_{x+h}-A\cdot y_x}{h}$$
$$= A\cdot\frac{y_{x+h}-y_x}{h}\quad (\text{für } h=0).$$

In diesem Produkt ist aber der erste Faktor A unverändert derselbe (weil er h nicht enthält) man mag für h setzen was man will, während der andere Faktor nichts anders als ∂y_x ist.

Anmerkung. Weil $\frac{y}{B}=\frac{1}{B}\cdot y$ ist, so ist auch, wenn B nach x konstant seyn sollte:

$$\partial\left(\frac{y_x}{B}\right)_x = \frac{1}{B}\cdot\partial y_x = \frac{\partial y_x}{B},$$

so daß das Obige (III.) auch bei einem konstanten Nenner geltend gemacht werden kann.

§. 10. Zusatz.

Aus diesen Lehrsätzen gehen auch noch folgende Ableitungsregeln hervor:

1) $\partial(A \cdot y_x + B \cdot z_x)_x = A \cdot \partial y_x + B \cdot \partial z_x$;

2) $\partial(y_x + z_x + u_x) = \partial y_x + \partial z_x + \partial u_x$;

3) $\partial(Ay_x + Bz_x + Cu_x)_x = A \cdot \partial y_x + B \cdot \partial z_x + C \cdot \partial u_x$;

4) $\partial(A + By_x + Cz_x + Du_x)_x = B \cdot \partial y_x + C \cdot \partial z_x + D \cdot \partial u_x$;

u. s. w. f.

Beispiele. Es ist diesem nach:

1) $\partial(a + bx^m)_x = \partial(bx^m)_x = b \cdot \partial(x^m)_x = bmx^{m-1}$ (§. 6. I.).

Eben so:

2) $\partial(2x - 3x^2 + 4a^x)_x = 2 \cdot \partial x_x - 3 \cdot \partial(x^2)_x + 4 \cdot \partial(a^x)_x$.

Nun ist aber nach (§. 8.),

$$\partial x_x = \frac{(x+h) - x}{h} \text{ (für } h = 0\text{), d. h. } = 1, \text{*)}$$

$$\partial(x^2)_x = 2x, \text{ und } \partial(a^x)_x = a^x \cdot \mathit{log}\, a \text{ (nach §. 6.);}$$

also, diese Werthe in (2.) substituirend:

$$\partial(2x - 3x^2 + 4a^x)_x = 2 - 6x + 4a^x \cdot \mathit{log}\, a.$$

Ferner ist

3) $\partial\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}\right)_x = -\frac{1}{2!} \cdot \partial(x^2)_x + \frac{1}{3!} \cdot \partial(x^3)_x - \frac{1}{4!} \cdot \partial(x^4)_x$;

dabei aber nach (§. 6. I.):

$$\partial(x^2)_x = 2x; \quad \partial(x^3)_x = 3x^2; \quad \partial(x^4)_x = 4x^3;$$

demnach, wenn dies in (3.) substituirt wird:

$$\partial\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}\right)_x = -x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!},$$

weil $\frac{1}{\alpha!} \cdot \alpha = \frac{1}{(\alpha - 1)!}$ ist.

---

*) Dasselbe ist bereits (§. 6. I. 1.) gefunden worden. Man lese auch daselbst noch einmal die Note.

§. 11. Erklärung.

Weil, wenn y eine beliebige Funktion von x ist, die Ableitung ∂y_x im Allgemeinen allemal selber wieder eine Funktion von x seyn wird, so kann von ihr selber wieder die Ableitung nach x genommen werden, welche letztere also durch $\partial(\partial y_x)_x$ vorgestellt und in der Regel wieder eine Funktion von x seyn wird. Diese neue Funktion von x nennt man nun die **zweite Ableitung** von y nach x, und bezeichnet sie kürzer durch

$$\partial^2 y_x, \text{ zuweilen auch bloß durch } \partial^2 y.$$

Und in so ferne diese zweite Ableitung $\partial^2 y_x$ selber wieder eine Funktion von x seyn wird, so kann man von ihr wieder die Ableitung nach x, nämlich $\partial(\partial^2 y_x)_x$ nehmen, diese neue Funktion von x durch $\partial^3 y_x$ zuweilen auch bloß durch $\partial^3 y$ bezeichnen und die **dritte Ableitung** von y nach x nennen; u. s. w. f.

Auf diese Weise ist die Bedeutung der durch

$$\partial^n y_x$$

vorgestellten **nten Ableitung** von y nach x festgestellt.

Diese Definition spricht sich am kürzesten in der Gleichung

$$(♀) \quad \partial^{m+1} y_x = \partial(\partial^m y_x)_x$$

aus, wo m entweder 0 oder jede positive ganze Zahl bedeutet, sobald man unter

$\partial^0 y_x$ die Funktion y_x selbst,

und unter

$\partial^1 y_x$ die erste Ableitung ∂y_x

versteht, was hiermit ein für allemal angenommen seyn mag.

Alle diese Ableitungen werden aber **höhere Ableitungen** von y nach x genannt.

Beispiele. 1) Ist z. B. $y_x = ax^m$, so hat man nach (§. 6. 1.):

$$\partial y_x = ma \cdot x^{m-1};$$

$$\partial^2 y_x = m(m-1)a \cdot x^{m-2};$$

$$\partial^3 y_x = m(m-1)(m-2)a \cdot x^{m-3};$$

$$\partial^4 y_x = m^{4|-1} \cdot a \cdot x^{m-4};$$

$$\partial^5 y_x = m^{5|-1} \cdot a \cdot x^{m-5};$$

$$\partial^n y_x = m^{n|-1} \cdot a \cdot x^{m-n}.$$ (Vgl. E. 40.)

2) Ist $y = a^x$; so hat man

$$\partial\, y_x = a^x \cdot \log a;$$

$$\partial^2 y_x = a^x \cdot (\log a)^2;$$

$$\partial^3 y_x = a^x \cdot (\log a)^3;$$

$$\partial^4 y_x = a^x \cdot (\log a)^4;$$

$$\partial^n y_x = a^x \cdot (\log a)^n.$$

3) Ist dagegen $y = e^x$, so hat man

$$\partial y^x = e^x = \partial^2 y_x = \partial^3 y_x = \partial^4 y_x = \partial^n y_x.$$

4) Und hat man gegeben

$$y = b \cdot \log x = \log (x^b),$$

so ergibt sich

$$\partial\, y_x = b \cdot \frac{1}{x} \quad = b \cdot x^{-1};$$

$$\partial^2 y_x = -b \cdot x^{-2} = -\frac{b}{x^2};$$

$$\partial^3 y_x = +2b \cdot x^{-3} = \frac{2b}{x^3};$$

$$\partial^4 y_x = -6b \cdot x^{-4} = -\frac{6b}{x^4};$$

$$\partial^{n+1} y_x = \pm \frac{n!\, b}{x^{n+1}}.$$

§. 12. Der Taylor'sche Lehrsatz für alle Funktionen von x.

Ist y eine beliebige Funktion von x, so ist allemal

$$\odot)\quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

(wenn man unter $\partial^0 y_x$, die Funktion y oder y_x selbst, und unter

$\partial^1 y_x$ die erste Ableitung ∂y_x versteht); d. h. es ist, im Falle man nur einige wenige erste Glieder schreiben will, allemal

$$(\mathfrak{D})\quad y_{x+h} = y_x + \partial y_x \cdot h + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \partial^4 y_x \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

Beweis. Man weis aus (§. 5.), daß y_{x+h} allemal einer nach ganzen Potenzen von h fortlaufenden Reihe gleich ist, deren erstes Glied y_x selbst ist, und deren zweites Glied durch $\partial y_x \cdot h$ bezeichnet worden ist. — Setzt man daher

$$1)\quad y_{x+h} = S[(y_a)_x \cdot h^a]$$

d. h. $y_{x+h} = (y_0)_x + (y_1)_x \cdot h + (y_2)_x \cdot h^2 + (y_3)_x \cdot h^3 + \cdots$,

so kommt alles darauf an, die Koeffizienten $(y_2)_x$, $(y_3)_x$, $(y_4)_x$, ꝛc. ꝛc., also $(y_a)_x$ zu finden, während man schon hat

$$2)\quad (y_0)_x = y_x = y$$

und

$$3)\quad (y_1)_x = \partial y_x,$$

d. h. während wir schon wissen, daß das erste Glied $(y_0)_x$ dieser Reihe nichts anders ist als die Funktion y_x oder x selbst, und während wir den hier durch $(y_1)_x$ vorgestellten Koeffizienten bereits früher durch ∂y_x bezeichnet haben.

Setzt man aber in dieser Gleichung (1.) einmal $x+k$ statt x, ein andermal $h+k$ statt h, so erhält man in beiden Fällen zur Linken y_{x+h+k}; mithin hat man dann zur Rechten zwei Reihen nach h und nach k fortlaufend, welche einander identisch seyn müssen, so daß aus der Gleichstellung der Koeffizienten ihrer einzelnen Glieder, wie solches statt finden muß, eine Reihe von Gleichungen zwischen diesen Koeffizienten, und zur Bestimmung dieser Koeffizienten (des folgenden immer aus dem vorhergehenden) hervorgeht. — Diese Rechnung werde aber nun wirklich durchgeführt.

Setzt man nämlich zuerst in (1.) $x+k$ statt x, so erhält man:

$$4)\quad y_{x+k+h} = S[(y_a)_{x+k} \cdot h^a]$$

Weil aber für jeden Werth von a (der 0 oder eine ganze Zahl seyn muß) der Koeffizient $(y_a)_x$, in so ferne er eine Funktion von x ist, die Eigenschaft hat, daß $(y_a)_{x+k}$ in eine nach ganzen Potenzen

von k fortlaufende Reihe sich verwandeln läßt, so hat man wieder nach (§. 5.):

$$5)\quad (y_a)_{x+k} = S[(y_{a,b})_x \cdot k^b],$$

wo $$6)\quad (y_{a,0})_x = (y_a)_x$$

und $$7)\quad (y_{a,1})_x = \partial(y_a)_x$$

ist, während $(y_{a,2})_x$, $(y_{a,3})_x$, 2c. 2c. die übrigen Koeffizienten dieser Reihe vorstellen.

Setzt man aber diesen Werth aus (5.) statt $(y_a)_{x+k}$ in (4.), so erhält man

$$8)\quad y_{x+k+h} = S[(y_{a,b})_x \cdot h^a \cdot k^b].$$

Wird nun ferner in (4.) $h+k$ statt h gesetzt, so ergibt sich

$$9)\quad y_{x+h+k} = S[(y_a)_x \cdot (h+k)^a].$$

Es ist aber nach dem binomischen Lehrsatze (E. 43. I.)

$$10)\quad (h+k)^a = S\left[\frac{a!}{b!\,c!} \cdot h^b \cdot k^c\right]_{b+c=a};$$

folglich, wenn man diesen Werth in (9.) substituirt, und zugleich $b+c$ statt a schreibt:

$$11)\quad y_{x+h+k} = S\left[\frac{(b+c)!}{b!\,c!}(y_{b+c})_x \cdot h^b \cdot k^c\right].$$

Und weil nun die beiden Reihen zur Rechten in (8.) und in (11.) einander gleich sind, so müssen auch in beiden die Koeffizienten von $h^m \cdot k^n$ einander gleich seyn, d. h. es muß seyn

$$12)\quad (y_{m,n})_x = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \cdot (y_{m+n})_x;$$

oder, wenn man hier 1 statt n setzt, und bemerkt, daß nach (N. 7.)

$$(y_{m,1})_x = \partial y_{m,x}$$

und außerdem noch $\frac{(m+1)!}{m!} = m+1$ ist,

$$13)\quad \partial(y_m)_x = (m+1) \cdot (y_{m+1})_x$$

oder

$$14)\quad (y_{m+1})_x = \frac{1}{m+1} \cdot \partial(y_m)_x.$$

So wie aber hier nach und nach 0,1,2,3,4,5,6, u. s. f. zuletzt $a-1$ statt m gesetzt wird, so erhält man, weil

$$\partial\left(\frac{1}{b+1}\cdot\partial^b y_x\right) = \frac{1}{b+1}\cdot\partial^{b+1} y_x$$

ist, nach (§. 9. I. u. §. 10. II.):

$$(y_1)_x = 1\cdot\partial(y_0)_x = \partial y_x;$$

$$(y_2)_x = \frac{1}{2}\cdot\partial(y_1)_x = \frac{1}{2}\cdot\partial^2 y_x;$$

$$(y_3)_x = \frac{1}{3}\cdot\partial(y_2)_x = \frac{1}{3!}\cdot\partial^3 y\ ;$$

$$(y_4)_x = \frac{1}{4}\cdot\partial(y_3)_x = \frac{1}{4!}\cdot\partial^4 y_x;$$

$$(y_5)_x = \frac{1}{5}\cdot\partial(y_4)_x = \frac{1}{5!}\cdot\partial^5 y_x;$$

u. s. w. f.; zuletzt

$$15)\quad (y_a)_x = \frac{1}{a!}\cdot\partial^a y_x;$$

und dieser Werth des Koeffizienten $(y_a)_x$ in (1.) gesetzt, gibt die Gleichung des Lehrsatzes.

Anmerkung. Die nach (§. 5.) für y_{x+h} (unter der Voraussetzung daß x noch allgemein ist) allemal existirende Reihe nach h wird demnach allemal gefunden, wenn man nur von jeder Funktion von x, die Ableitung finden kann, (nach §. 5. oder §. 8.), um aus y nach und nach die Koeffizienten ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$, ꝛc. ꝛc. $\partial^a y_x$, finden zu können, nach (§. 11.).

Und will man die speziellen Werthe von x finden, für welche eine, dem y_{x+h} gleiche, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe nicht existirt, so darf man nur die Werthe von x suchen, welche entweder y_x selbst oder eine der Ableitungen

$$\partial y_x,\ \partial^2 y_x,\ \partial^3 y_x,\ \text{ꝛc. ꝛc.}, = \frac{1}{0}$$

oder $= \log 0$ machen, oder ihnen überhaupt eine im Kalkul unzulässige Form geben. — Zu den hieher gehörigen Beispielen des (§. 7.) kann man noch die Gleichung

$$y = b + \sqrt{x-a} + \sqrt{x-c}$$

hinzufügen, welche

$$y_{a+h} = b + h^{\frac{1}{2}} + [(a-c)+h]^{\frac{1}{2}},$$

$$y_{c+h} = b + [(c-a)+h]^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}$$

liefert. — Die Gleichung

$$y = b + (x-a)\sqrt{x-c}$$

liefert dagegen

$$y_{a+h} = b + h \cdot [(a-c)+h]^{\frac{1}{2}}$$

und $$y_{c+h} = b + [(c-a)+h] \cdot h^{\frac{1}{2}}.$$

Anmerkung 2. Wollte man den Satz vorausschicken „daß es einerlei ist, ob man von f_{x+h} nach x die Ableitungen nimmt oder nach h, d. h. daß

I. $\partial^n(f_{x+h})_x = \partial^n(f_{x+h})_h$ ist," *)

so konnte die Taylorsche Reihe viel direkter, wie folgt, gefunden werden. — Man nimmt nämlich die nach (§. 5.) für f_{x+h} allemal existirende Reihe, mit unbestimmten Koeffizienten an, d. h.

1) $f_{x+h} = A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + A_4 \cdot h^4 + \cdots\cdot$

nimmt dann, um nach (I.) daraus richtige Gleichungen zu erhalten,

---

*) Dies hätte leicht geschehen können, weil nach (§. 8.), wenn man k statt des dortigen h schreibt,

$$\partial(f_{x+h})_x = \frac{f_{(x+k)+h} - f_{x+h}}{k} \text{ für } k = 0,$$

und $$\partial(f_{x+h})_h = \frac{f_{x+(h+k)} - f_{x+h}}{k} \text{ für } k = 0 \text{ ist,}$$

beide Ausdrücke aber offenbar durch nichts von einander abweichen, da

$$f_{(x+k)+h} = f_{x+(h+k)}$$

seyn muß. — Bezeichnet man nun

$\partial(f_{x+h})_x = \partial(f_{x+h})_h$ durch φ_{x+h},

so ist aufs neue

$\partial(\varphi_{x+h})_x = \partial(\varphi_{x+h})_h$ d. h. $\partial^2(f_{x+h})_x = \partial^2(f_{x+h})_h$. u. s. w. f.

links die Ableitungen nach x, rechts aber die nach h, und man bekommt die Gleichungen

$$2)\ \partial(f_{x+h})_x = A_1 + 2A_2 \cdot h + 3A_3 \cdot h^2 + 4A_4 \cdot h^3 + \cdots$$

$$3)\ \partial^2(f_{x+h})_x = 2 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 \cdot h + 4 \cdot 3 \cdot A_4 \cdot h^2 + \cdots$$

$$4)\ \partial^3(f_{x+h})_x = + 3 \cdot 2 \cdot A_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot A_4 \cdot h + \cdots$$

$$5)\ \partial^4(f_{x+h})_x = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot A_4 + \cdots$$

u. s. w. f.

Setzt man nun in diesen Gleichungen links und rechts 0 statt h, und bemerkt man, daß dann

$$\partial(f_{x+h})_x = \frac{f_{(x+k)+h} - f_x}{k} \text{ für } k = 0, \text{ in } \frac{f_{x+k} - f_x}{k} \text{ für } k = 0,$$

d. h. in ∂f_x, und allgemein $\partial^n(f_{x+h})_x$ in $\partial^n f_x$ übergeht, so erhält man die Gleichungen

$$f_x = A_0, \quad \partial f_x = A_1, \quad \partial^2 f_x = 2!\,A_2,$$

$$\partial^3 f_x = 3!\,A_3, \quad \partial^4 f_x = 4!\,A_4, \quad \partial^5 f_x = 5!\,A_5,$$

und allgemein

$$\partial^n f_x = n!\,A_n \quad \text{d. h.} \quad A_n = \frac{1}{n!} \cdot \partial^n f_x$$

wodurch der Taylorsche Lehrsatz gefunden, und auch erwiesen ist.

Diese Entwickelung hat übrigens noch den Vortheil, daß sie den andern für die Anwendungen oft so wichtigen Satz wahrnehmen läßt, nemlich folgenden:

Wenn für einzelne Ausnahmswerthe von x, z. B. für x = a, die für f_{x+h} existirende Reihe, positive gebrochene Potenzen von h in sich aufnimmt, wenn z. B. ist

$$\text{II.}\quad f_{x+h} = A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + \cdots A_n \cdot h^n + A \cdot h^{\frac{\mu}{\nu}} + \cdots$$

$\frac{\mu}{\nu} > n$ aber $< n+1$ gedacht, und wenn dabei diese Potenz $h^{\frac{\mu}{\nu}}$, unter der Voraussetzung daß die Reihe zur Rechten steigend geordnet ist, die erste der gebrochenen Potenzen ist, so ist, für diesen Werth x = a, doch noch immer

$$A_0 = f_x, \quad A_1 = \partial f_x, \quad A_2 = \partial^2 f_x \cdot \frac{1}{2!}, \cdots$$

und auch noch $A_n = \partial^n f_x \cdot \frac{1}{n!}$; während dagegen erst

$$\partial^{n+1} f_x, \quad \partial^{n+2} f_x, \quad \partial^{n+3} f_x,$$

und alle folgenden Ableitungen, für $x = a$ die (im Kalkul unzulässige) Form $\frac{1}{0}$ annehmen.

Man erkennt dies nämlich sogleich, wenn man links die Ableitungen nach x, rechts aber die Ableitungen nach h nimmt, wie kurz vorher geschehen ist, zuletzt aber 0 statt h schreibt, während unter x der bestimmte Werth a gedacht wird, welcher eben die Form der Gleichung (II.) verursacht hat, unsrer Voraussetzung zu Folge. (Vgl. §. 100.).

§. 13. Zusatz.

Der Maclaurin'sche Satz.

Setzt man in dieser Gleichung des Taylor'schen Lehrsatzes

$$1) \quad y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

0 statt x, so erhält man

$$2) \quad y_h = S\left[(\partial^a y_x)_0 \cdot \frac{h^a}{a!}\right]$$

d. h

$$y_h = (y_x)_0 + (\partial y_x)_0 \cdot h + (\partial^2 y_x)_0 \cdot \frac{h^2}{2!} + (\partial^3 y_x)_0 \cdot \frac{h^3}{3;} + \cdots,$$

wo dasmal y_h dieselbe Funktion von h ist, wie sie y_x von x war, wo ferner in den Koeffizienten zur Rechten, x nicht mehr vorkommt, weil durchaus 0 statt x gesetzt worden ist, wie das unten angehängte 0 und die Klammern andeuten sollen.

Und eben weil in (2.) der Buchstabe x durchaus nicht mehr vorkommt, und h allgemein gedacht ist, so kann man auch x statt h setzen, so daß aus (2.) erhalten wird

$$3) \quad y_x = S\left[(\partial^a y_x)_0 \cdot \frac{x^a}{a!}\right]$$

d. h.

$$y_x = (y_x)_0 + (\partial y_x)_0 \cdot x + (\partial^2 y_x)_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + (\partial^3 y_x)_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

welche Gleichung der Maclaurin'sche Lehrsatz genannt wird, und welche lehrt, wie eine Funktion y von x in eine unendliche

Reihe verwandelt wird, die nach ganzen Potenzen von x fortläuft (deren Koeffizienten natürlich x nicht enthalten dürfen, und auch wirklich nicht enthalten.)

Nach diesem Satze wird also eine Funktion y von x, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt, wenn man aus y_x die Ableitung ∂y_x, aus ∂y_x die Ableitung $\partial^2 y_x$, aus $\partial^2 y_x$ die Ableitung $\partial^3 y_x$, u. s. f. nach x, findet (nach §. 5. oder §. 8.), in diesen Funktionen, nachdem sie alle gefunden und entwickelt sind, 0 statt x setzt, und diese Werthe statt der Koeffizienten $(y_x)_0$, $(\partial y_x)_0$, $(\partial^2 y_x)_0$, $(\partial^3 y_x)_0$, $(\partial^4 y_x)_0$, 2c. 2c. in die Reihe (3.) substituirt.

Anmerkung. Weil hier in den Ableitungen y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, 2c. 2c. x nicht mehr allgemein bleibt, so wird hier der Fall eintreten können, daß, indem 0 statt x gesetzt wird, entweder y selbst oder doch eine oder mehre der Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, 2c die Form $\frac{1}{0}$ oder eine ähnliche im Kalkul nicht zulässige Form annehmen; welches dann allemal anzeigt, daß eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe nicht existirt, welche der gegebenen Funktion y gleich seyn könnte.

Beispiel 1. Es sey $y = a^x$, so ist nach (§. 6.)

$$\partial y_x = a^x \cdot log\, a; \text{ und nach (§. 9. III.)}$$

$$\partial^2 y_x = log\, a \cdot \partial(a^x) = (log\, a) \cdot \partial y_x = a^x \cdot (log\, a)^2;$$

$$\partial^3 y_x = (log\, a)^2 \cdot \partial(a^x) = a^x \cdot (log\, a)^3;$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\partial^\alpha y_x = a^x \cdot (log\, a)^\alpha;$$

also für x = 0

$$(\partial^\alpha y_x)_0 = a^0 \cdot (log\, a)^\alpha = (log\, a)^\alpha;$$

folglich wenn dies in (3.) substituirt wird

$$y = a^x = S\left[(log\, a)^\alpha \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!}\right]$$

d. h. $a^x = 1 + \frac{x \cdot log\, a}{1} + \frac{x^2 \cdot (log\, a)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (log\, a)^3}{3!} + \cdots$

Beispiel 2. Es sey $y_x = \log x$,

so ist nach (§. 6.) $\partial y_x = \frac{1}{x} = x^{-1}$;

und nach (§. 10.) u. (§. 6.) $\partial^2 y_x = \partial(x^{-1})_x = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;

so wie noch $\partial^3 y_x = \partial(-1 \cdot x^{-2})_x = -1 \cdot \partial(x^{-2})_x = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$;

und $\partial^4 y_x = 2 \cdot \partial(x^{-3})_x = -3!\, x^{-4} = -3!\, \frac{1}{x^4}$;

u. s. w. f.; also nach (§. 12.)

$$\log(x+h) = \log x + \frac{1}{x} \cdot h - \frac{1}{2x^2} \cdot h^2 + \frac{1}{3x^3} \cdot h^3 - \cdots,$$

während, wenn man 0 statt x setzt, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ ꝛc. ꝛc. die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, so daß also daraus hervorgeht, daß man zwar, nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so lange x noch ganz allgemein ist, $\log(x+h)$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe umformen kann, aber daß keine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe existirt, welche dem $\log x$ gleich seyn könnte.

Wird dagegen in obiger Reihe für $\log(x+h)$, 1 statt x gesetzt, so erhält man

$$\log(1+h) = \log 1 + 1 \cdot h - \tfrac{1}{2} \cdot h^2 + \tfrac{1}{3} \cdot h^3 - \cdots,$$

wo dann, weil h ganz allgemein ist, auch wieder x statt h gesetzt werden kann, so daß man hat, wenn zugleich $\log 1 = 0$ genommen wird,*)

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2} \cdot x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot x^3 - \cdots$$

§. 14. Zusatz.

Der allgemeinere Maclaurin'sche Satz.

Setzt man in dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 12.) nämlich in

$$1)\quad y_{x+h} = S\left[\partial^{a} y_x \cdot \frac{h^{a}}{a!}\right]$$

zuerst a statt x, so erhält man:

$$2)\quad y_{a+h} = S\left[(\partial^{a} y_x)_a \cdot \frac{h^{a}}{a!}\right],$$

---

*) Es hat $\log 1$ unendlich viele in $\pm 2a\pi \cdot \sqrt{-1}$ enthaltene Werthe, darunter auch den Werth 0 (Null), für $a = 0$.

wo $(\partial^a y_x)_a$ bedeutet was aus $\partial^a y_x$ wird, wenn man a statt x setzt. — Und weil hier nun x nicht mehr vorkommt, und h ganz allgemein gedacht ist, so setze man $x-a$ statt h (wodurch $a+h$ in $a+(x-a)$ d. h. in x übergeht); und es ergibt sich

$$3)\ y_x = S\left[(\partial^a y_x)_a \cdot \frac{(x-a)^a}{a!}\right]$$

d. h. $$y_x = (y_x)_a + (\partial y_x)_a \cdot (x-a) + (\partial^2 y_x)_a \frac{(x-a)^2}{2!} + (\partial^3 y_x)_a \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots,$$

welcher Satz die (Nro. 3. des §. 13.) also den gemeinen Maclaurinschen Lehrsatz als einen besondern Fall (für $a=0$) in sich schließt und daher der allgemeinere Maclaurin'sche Satz genannt werden kann.

Anmerkung 1. Dieser Satz gibt namentlich in dem Falle Entwickelungen in Reihen, wo der vorhergehende Satz auf unzulässige Formen des Kalkuls stößt. So kann man durch ihn, 1, 2, 3, ... n statt a setzend, sogleich den *log* x, in eine nach ganzen Potenzen von $x-1$, oder $x-2$, $x-3$, ... $x-n$ fortlaufende Reihe verwandelt sehen.

Andere Vortheile dieses Satzes haben in dem Umstande ihren Grund, daß, wegen des unbestimmten a, für jeden andern Werth von x, dem a ein anderer Werth gegeben werden kann, so z. B. daß $(x-a)$ sehr klein, und die Reihe selbst zuweilen sehr schnell konvergent wird.

Ueberhaupt ist es allemal in der Analysis ein wesentlicher Vortheil, Formeln sich zu verschaffen, die noch einen unbestimmten Buchstaben in sich aufgenommen haben, weil nachgehends in jeder einzelnen Anwendung, diesem Buchstaben noch derjenige Werth untergelegt gedacht werden kann, welcher für diese Anwendung als der zweckmäßigste gefunden wird.

Schluß-Anmerkung.

Man erblickt aber in diesem Kapitel die ganze Ableitungsrechnung, (welche in einer andern Form vorgetragen, die Differenzialrechnung wird), mit allen ihren Anwendungen. Die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, $\partial^4 y_x$, ꝛc. ꝛc. nach x, werden nach (§. 5.) oder (§. 8.) in Verbindung mit (§. 11.) aus einander (eine nach der andern) gefunden. — Die Anwendungen sind in den (§§. 12. 13. 14.)

enthalten, in so ferne man sich der so gefundenen Ableitungen bedienen kann, um y_{x+h} oder y_x in, nach ganzen Potenzen von h oder nach ganzen Potenzen von x—a, fortlaufende Reihen umzuformen. Auch liegt eine neue Anwendung noch in dem Satze (§. 7. N. 4.), daß nämlich, wenn

$$y = z \quad \text{ist,}$$

auch noch

$$\partial y = \partial z,$$

und natürlich dann noch

$$\partial^2 y = \partial^2 z, \quad \partial^3 y = \partial^3 z, \text{ etc. etc.}$$

seyn muß, so daß man also aus einer, zwischen zwei Funktionen von x statt findenden Gleichung, noch neue richtige Gleichungen ableiten kann, durch ein Verfahren, welches wenigstens viel zusammengesetzter ist, als die bloßen einfachen Operationen des Kalkuls, wie solche gewöhnlich in der niedern Analysis angewandt werden, um Gleichungen aus Gleichungen abzuleiten.

Sollen jedoch diese Lehren ganz fruchtbar werden, so thut es noch Noth, das Auffinden der Ableitungen, wie solches (§. 5.) und (§. 8.) bestimmt ist, dadurch gehörig bequem zu machen, daß Sätze (Formeln) mitgetheilt werden, durch welche die Ableitungen der zusammengesetzten Funktionen aus denen der einfachern gebildet erscheinen, während diese letztern wieder aus den Ableitungen der noch einfachern (nach denselben Formeln) bestimmt werden müssen, bis man zuletzt auf die Ableitungen der einfachsten Funktionen zurückgeführt wird, welche (§. 6.) bereits gefunden sind, so daß sie dorther bloß entnommen werden können.

Dies eben angedeutete Verfahren ist durchaus naturgemäß und von uns bisher (d. h. in den beiden vorhergehenden Theilen dieses Systems) in der niedern Analysis allemal gebraucht. Um

$$\text{z. B.} \quad \frac{(x^4 - x + 1)\cdot x^3 - x^4}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

mit x^2 zu multiplizieren, muß man wissen 1) daß der erstere Ausdruck ein Quotient ist, und 2) wie ein Quotient multiplizirt wird. Soll nun der Zähler $(x^4 - x + 1)x^3 - x^4$ mit x^2 multiplizirt werden, so muß man wiederum wissen 1) daß dieser Zähler eine Differenz ist, und 2) wie eine Differenz multiplizirt wird. Nachgehends, wenn man den Minuenden $(x^4 - x + 1)x^3$ und den Subtrahenden x^4, mit x^2 multiplizieren will, muß man wissen, daß der erstere ein Produkt, der letztere dagegen eine Potenz ist, und auch, wie ein Produkt und

eine Potenz multiplizirt wird. Darauf, wenn der Faktor x^3 mit x^2 multiplizirt werden soll, muß wiederum bekannt seyn, daß x^3 eine Potenz ist, und auch wie diese Potenz mit x^2 multiplizirt wird. Und auf diesem Wege erhält man zuletzt als Endresultat der obigen Multiplikation, den Quotienten

$$\frac{(x^4 - x + 1)\, x^5 - x^6}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Gerade so müssen wir nun arbeiten gelernt haben, wenn von demselben Ausdruck

$$y = \frac{(x^4 - x + 1)\, x^3 - x^5}{\sqrt[3]{x^2 - 1}},$$

die Ableitung nach x gefunden werden soll. Man muß eine Formel haben, welche lehrt, wie die Ableitung $\partial\left(\frac{u}{v}\right)$ in die Ableitungen ∂u und ∂v ausgedrückt werden; und wenn, wie hier, der Zähler u wiederum eine Differenz $w - t$ ist, so muß eine zweite Formel existiren, welche lehrt, wie ∂u in ∂w und ∂t auszudrücken ist; während, in so ferne v eine Wurzel $\sqrt[3]{s}$ vorstellt, wiederum eine Formel vorhanden seyn muß, welche lehrt, wie ∂v in ∂s ausgedrückt wird. Auf diese Weise muß man zuletzt zu den einfachsten Funktionen gelangen, aus denen die gegebene nach und nach zusammengesetzt ist, und die Ableitung der gegebenen Funktion wird dann eben so nach und nach in die schon aus (§. 6.) bekannten Ableitungen der einfachsten Funktionen ausgedrückt, so daß man bei einiger Uebung in der Anwendung dieser (übrigens erst im nächsten Kapitel aufzustellenden) Formeln, diese Ableitungen der zusammengesetztern Funktionen, und also auch die 2ten, 3ten, 4ten, rc. Ableitungen (nach §. 11.), mit ziemlicher mechanischer Fertigkeit und Leichtigkeit hinschreiben kann, ohne sie jedesmal, wie solches in den bisherigen Beispielen fast allemal geschehen ist, alle direkt nach der Regel des (§. 8.), oder wohl gar nach der Definition des (§. 5.) auffinden zu müssen.

Vorher aber noch die Bestimmung des Verhältnisses der Ableitungsrechnung zur Differenzialrechnung.

Zweite Abtheilung.

Die Differenzialrechnung in ihren ersten Begriffen und ihr Zusammenhang mit der Ableitungsrechnung. Der einfache Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz in Differenzialzeichen ausgedrückt.

---

§. 15. Erklärung.

Ist s irgend ein veränderlicher Ausdruck, so soll Δs die (positive, negative oder imaginäre) Aenderung bedeuten, um welche s vermehrt gedacht wird, wenn s unabhängig ist, oder vermehrt gedacht werden muß, wenn s abhängig veränderlich ist (z. B. wenn s eine Funktion von x ist, in welcher x und somit auch s eine Aenderung erleidet); und diese Aenderung Δs nenne man die Differenz von s. — Diese Differenz Δs ist also entweder unabhängig und völlig willkührlich, oder zu der Differenz Δx von x gehörig, je nachdem s als unabhängig veränderlich, oder als eine Funktion von x gedacht worden ist.

§. 16. Zusatz.

Diesem nach ist das h, um welches man sich früher x vermehrt gedacht hat, jetzt durch Δx vorgestellt, und der Taylor'sche Satz (§. 12.) kann nun so geschrieben werden:

$$1)\quad y_{x+\Delta x} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{\Delta x^a}{a!}\right]$$

d. h. $$y_{x+\Delta x} = y_x + \partial y_x \cdot \Delta x + \partial^2 y_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 y_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots \text{*)}$$

Und weil Δy die, durch die Vermehrung Δx von x, verursachte Vermehrung von y bedeutet, so folgt

$$2)\quad \Delta y = y_{x+\Delta x} - y_x,$$

---

*) Es wird hier und in der Folge immer bloß Δx^n statt $(\Delta x)^n$ geschrieben, um im Drucke die, Raum wegnehmenden Klammern zu ersparen.

also

3) $\Delta y = \partial y_x \cdot \Delta x + \frac{1}{2!}\partial^2 y_x \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\partial^3 y_x \cdot \Delta x^3 + \cdots;$

und, wenn man durch Δx wegdividirt:

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \partial y_x + \Delta x \cdot \left[\frac{1}{2!}\partial^2 y_x + \frac{1}{3!}\partial^3 y_x \cdot \Delta x + \frac{1}{4!}\partial^4 y_x \cdot \Delta x^2 + \cdots\right],$

welcher Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzen-Quotient genannt wird.*)

§. 17. Zusatz.

Denkt man sich alle vorkommenden Ausdrücke reel,**) so ist klar, daß dieser Differenzenquotient (in §. 16. N. 4.) seinen Werth mit dem von Δx zugleich ändert, und daß er dem ersten Gliede ∂y_x desto mehr sich nähert, je näher Δx der Null rückt; so daß, wenn Δx im Moment des Verschwindens gedacht wird, der Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und seinem ersten Gliede ∂y_x, selber im Moment des Verschwindens sich befindet. ***)

---

*) Den Quotienten $\frac{A}{B}$ oder $A:B$ nennt man oft auch das Verhältniß von A zu B. — In diesem Sinne ist also der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\Delta y:\Delta x$ auch das Verhältniß der Differenzen Δy und Δx zu einander. Und in so ferne diese Differenz Δx dasjenige ausmacht, um welches x wachsend gedacht worden ist, und Δy den zugehörigen Zuwachs von y vorstellt, so kann man auch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, das Verhältniß der (zusammengehörigen) Zuwachse von x und von y nennen.

**) Diese, für die nachfolgenden Resultate so nothwendige Annahme, welche die Allgemeinheit der Ausdrücke aufhebt, wäre allein hinreichend, die Ableitungsrechnung als eine allgemeinere zu karakterisiren, welche, eben ihrer Allgemeinheit wegen, der Differenzialrechnung vorzuziehen ist.

***) Für diejenigen Leser, denen die beiden ersten Theile dieses Systems nicht sogleich zur Hand liegen, mögen die Sätze, auf welche

§. 18. Zusatz.

Es ist also, so oft alle vorkommenden Ausdrücke reel gedacht werden, die (§. 5.) definirte Ableitung ∂y_x, zu gleicher Zeit die Grenze, welcher sich der Differenzen-Quotient

---

sich die Differenzialrechnung gründet, und um welche sich alle Anwendungen der Ableitungsrechnung herumdrehen, hier in der Kürze zusammengedrängt wiederholt werden.

I.

1) Die geometrische Reihe

$$P + Pk + Pk^2 + Pk^3 + Pk^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

konvergirt allemal, so oft $k < 1$ ist, d. h. sie hat dann allemal einen bestimmten endlichen Werth; und ist $k = \frac{1}{2}$, wo dann jedes folgende Glied die Hälfte des vorhergehenden ist, so ist allemal das erste Glied P gleich der Summe aller übrigen Glieder.

Denn es wird die Summe von n ersten Gliedern

$$= P \cdot \frac{1}{1-k} - P \cdot \frac{k^n}{1-k};$$

und $\frac{k^n}{1-k}$ rückt der Null immer näher, sobald $k < 1$, je größer n genommen wird, so daß die ganze Summe aller Glieder, für $k < 1$

$$= P \cdot \frac{1}{1-k}$$

zu nehmen ist. — Für $k = \frac{1}{2}$ wird aber $1 - k = \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{1-k} = 2$, mithin diese Summe $= 2P$, so daß, weil das erste Glied schon P ist, auf die Summe aller übrigen Glieder ebenfalls P kommt.

2) Jede reele numerische unendliche Reihe ist konvergent, d. h. hat einen endlichen Werth, wenn ihre Glieder, von irgend einem Gliede ab, schneller oder eben so schnell abnehmen, als die obige geometrische Reihe für $k < 1$. — Und nehmen die Glieder so ab, daß jedes folgende Glied kleiner als die Hälfte des vorhergehenden ist, so ist das erste Glied der Reihe größer als die Summe aller übrigen Glieder.

3) In jeder Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot k + A_2 \cdot k^2 + A_3 \cdot k^3 + A_4 \cdot k^4 + \cdots,$$

in welcher die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3, 2c. reel sind, und wo P gleich oder größer ist, als der größeste der Quotienten zweier auf einander folgenden der Koeffizienten (den später folgenden zum

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer mehr und mehr und ohne Aufhören nähert, je kleiner die Differenz Δx gedacht wird, so daß für eine im Moment des Verschwindens gedachte Differenz Δx, die Annäherung des Quo=

Dividenden genommen), ist für $k < \frac{1}{2P}$ das erste Glied A_0, wenn solches nicht Null ist, absolut genommen, allemal größer als die Summe aller übrigen Glieder, letztere ebenfalls absolut genommen.

Denn es wird für $k < \frac{1}{2P}$ jedes folgende Glied kleiner als die Hälfte des vorhergehenden, weil

$$\text{z. B.}\quad A_n \cdot k^n = \left(A_{n-1} \cdot k^{n-1}\right) \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot k$$

wird, während

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} \overset{=}{<} P$$

so wie

$$k < \frac{1}{2P},$$

folglich, (wenn man diese beiden multiplizirt, und, wie hier allemal vorausgesetzt wird, nur die absolute Zahl im Auge hat)

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot k < \tfrac{1}{2} \quad \text{ist.}$$

4) Man kann daher in jeder nach ganzen Potenzen von k fortlaufenden Reihe, für k allemal einen Werth setzen (jeden nämlich, welcher $< \frac{1}{2P}$), für welchen der Werth der ganzen Reihe

$$A_0 + A_1 \cdot k + A_2 \cdot k^2 + A_3 \cdot k^3 + \cdots$$

mit dem ersten Gliede A_0 zugleich positiv oder zugleich negativ ist.

II.

1) Eine Linie welche anfänglich eine bestimmte Länge hat, kann man sich stetig größer werdend denken, so nämlich, daß der Unterschied zwischen einer dieser Längen und der nächst darauf folgenden im Moment des Verschwindens ist, d. h. immer noch kleiner ist, als jede noch so klein gedachte Zahl.

2) Es ist daher eine im Moment des Verschwindens befindliche Zahl k denkbar (in der Idee, aber nie wirklich herstellbar, in Ziffern) welche immer noch kleiner ist, als jede noch so klein gedachte Zahl δ,

tienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ an die Ableitung ∂y_x so groß ist, daß der noch vorhandene Unterschied selber im Moment des Verschwindens sich befindet.

---

und welche im Moment des Verschwindens befindlich genannt werden kann, weil sie der Null näher rückt, als jede noch so kleine Zahl δ (ja man kann sagen, weil sie der Null nächst angrenzt).

3) Ist k im Moment des Verschwindens und p eine ganz beliebige aber bestimmte Zahl, so ist auch pk im Moment des Verschwindens.

Denn wäre pk nicht $<\delta$, also pk $\overline{\overline{>}}\ \delta$, so wäre auch k $\overline{\overline{>}}\ \frac{\delta}{p}$, d. h. k nicht kleiner als die Zahl $\frac{\delta}{p}$, also k selbst nicht im Moment des Verschwindens.

4) Ist k im Moment des Verschwindens, so ist in jeder Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot k + A_2 \cdot k^2 + A_3 \cdot k^3 + \cdots$$

mit reelen und endlichen Koeffizienten, das erste Glied A_0 größer als die Summe aller übrigen Glieder der Reihe; also die Summe der ganzen Reihe kleiner als das doppelte erste Glied, d. h. $< 2A_0$, wenn dieses erste Glied nicht Null ist, und absolut genommen wird.

5) Und eben deshalb ist, immer unter der Voraussetzung, daß k im Moment des Verschwindens gedacht ist, die Summe der ganzen Reihe $A_0 + A_1 \cdot k + A_2 \cdot k^2 + A_3 \cdot k^3 + \cdots$, allemal $< A_0 + 2A_1 \cdot k$, also von A_0 um weniger als $2A_1 \cdot k$ d. h. um etwas verschieden, welches nach (N. 3.) ebenfalls im Moment des Verschwindens sich befindet, wenn nur A_1 nicht Null ist.

Es ist nämlich die ganze Reihe

$$= A_0 + k(A_1 + A_2 \cdot k + A_3 \cdot k^2 + \cdots\cdot)$$

also $< A_0 + k(2A_1)$ d. h. $< A_0 + 2A_1 \cdot k$

weil $2A_1 > A_1 + A_2 \cdot k + A_3 \cdot k^2 + \cdots\cdot$ ist.

6) Daher ist auch jede Reihe von der Form

$$B_1 \cdot k + B_2 \cdot k^2 + B_3 \cdot k^3 + \cdots\cdot$$

welche beliebige reele endliche Koeffizienten hat, mit k zugleich im Moment des Verschwindens.

Weil solche Reihe $< 2B_1 \cdot k$ ist.

Bezeichnet man daher die Differenzen Δx, Δy, im Falle sie im Moment des Verschwindens gedacht sind, beziehlich durch dx, dy,*) und nennt solche dann **Differenzialien**, so wird die Gleichung (4. §. 16.) in

$$\frac{dy}{dx} = \partial y_x + dx \cdot \left[\frac{1}{2!}\partial^2 y_x + \frac{1}{3!}\partial^3 y_x \cdot dx + \frac{1}{4!}\partial^4 y_x \cdot dx^2 + \cdots\right]$$

übergehen; und dabei wird der Unterschied

$$\frac{dy}{dx} - \partial y_x$$

im Moment des Verschwindens seyn, d. h. kleiner seyn, als jede noch so klein gedachte Zahl.

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ wird aber jetzt **Differenzialquotient** genannt.

§. 19. Erklärung.

Die **Differenzialrechnung** betrachtet die Abhängigkeit der durch dx und dy bezeichneten, **jedesmal im Moment des Verschwindens gedachten**, und **Differenzialien** genannten, Aenderungen von x und y zu einander, unter der Voraussetzung, daß y eine Funktion von x (also auch x eine Funktion von y) ist. — Sie setzt aber, obgleich vollständig

1) $dy = \partial y_x \cdot dx + \frac{1}{2!}\partial^2 y_x \cdot dx^2 + \frac{1}{3!}\partial^3 y_x \cdot dx^3 + \cdots\cdots$ **)

---

*) Man unterscheide aber von nun an wohl, die (geraden und kursiven) *d*, von den (runden) ∂. — Letztere bedeuten immer **Ableitungen**, also endliche Funktionen, während erstere *d* allemal unendlich kleine d. h. im Moment des Verschwindens befindliche Zuwachse vorstellen, welche bald als vollständige Zuwachse, meist aber nur als erste nnd bedeutendste Glieder des vollständigen Zuwachses angesehen werden. **Die (geraden und kursiven) *d* stellen also allemal Differenzialien vor, und nie Ableitungen, welche letztern allein durch die (runden) ∂ vorgestellt werden.**

**) Auch hier wird immer dx^n statt $(dx)^n$ geschrieben, um im Druck, vermöge des Auslassens der Klammern, Raum zu ersparen.

ist, doch bloß

2) $dy = \partial y_x \cdot dx$, also $\frac{dy}{dx} = \partial y_x$.

Es erhellet aber aus dieser letztern Definition, daß der Begriff des Differenzials dy ein zweifacher ist, dessen einer Sinn dem andern widerspricht. Denn ursprünglich versteht man unter dy die ganze Aenderung in (1.), und sogleich darauf wiederum nur das erste Glied $\partial y_x \cdot dx$ dieser Aenderung. Allein, eben weil dx im Moment des Verschwindens gedacht ist, gibt der 2te Sinn nach (§. 18.) eine Genauigkeit, die von der Wahrheit ebenfalls nur um ein im Moment des Verschwindens befindliches abweicht,*) wenn man auch nicht in Abrede stellen kann, daß in solchen kombinirten Rechnungen, in denen sich die mit dx behafteten Glieder aufheben, um nicht unrichtige Resultate zu bekommen, für das Differenzial dy nicht bloß $\partial y_x \cdot dx$ genommen werden darf, sondern auch noch eins oder einige der übrigen Glieder aus der Gleichung (1.) noch hinzugenommen werden müssen.

§. 20. Zusatz.

Die praktische Regel für das Auffinden des zum Differenziale dx gehörigen Differenzials dy, ist daher ganz einfach die, daß man suchen muß, aus

$$\frac{y_{x+dx} - y_x}{dx},$$

nach der Division mit dx, 0 statt dx setzend, dem (§. 8.) gemäß, und auch im Sinne des (§. 8.), die Ableitung ∂y_x zu finden,

---

*) Häufig, ja meistens weicht man gar nicht von der Wahrheit ab; in allen den Fällen nämlich gar nicht, in denen das gesuchte dy wirklich nur in dem Sinne $\partial y_x \cdot dx$, also nicht eigentlich als vollständiges Differenzial, sondern nur als das bedeutendste Glied desselben gesucht wird, welches in der That in den meisten Anwendungen, die man von der Differenzialrechnung gemacht sieht, der Fall ist, wie in die Augen fallen wird, sobald man den Gang der Rechnung mit Aufmerksamkeit verfolgt.

nachgehends aber $\frac{dy}{dx} = \partial y_x$ oder $dy = \partial y_x \cdot dx$ zu nehmen.

Oder auch: man denke sich die Differenz $y_{x+dx} - y_x$ in eine nach ganzen Potenzen von dx fortlaufende Reihe verwandelt, und die mit den höhern Potenzen von dx behafteten Glieder, nachher, oder schon während der Entwickelung der Reihe, außer Acht gelassen, so daß bloß das erste Glied $\partial y_x \cdot dx$ übrig bleibt. Man nennt aber dieses Geschäft das Differenziiren.

Anmerkung. Häufig pflegt man durch Nebenbetrachtungen (oft durch geometrische) die Entwickelung in Reihen nach dx, dadurch überflüssig zu machen, daß man statt der in Rechnung zu bringenden Ausdrücke, sogleich andere setzt, welche von den zu setzenden bereits um die höhern Potenzen von dx verschieden sind, so daß letztere dadurch sogleich weggelassen sind, und gar nicht mehr erscheinen.

Beispiel 1. Es sey z. B. im Sinne der Differenzialrechnung das Differenziale dy zu finden, wenn $y = Sin\,x$ ist.

Ist (Fig. 1.) *) für den Radius $AC = 1$, Bog. $AB = x$, Bog. $BF = dx$, so ist $CD = Cos\,x$, $BD = Sin\,x$ und $FE = Sin(x + dx)$, also $FG = dy$. Weil aber dx d. h. BF, im Moment des Verschwindens gedacht ist, so ist BFG als ein rechtwinkliches Dreieck anzusehen, wo die Hypothenuse $BF = dx$ auf BC senkrecht steht, welches deshalb mit dem Dreieck BDC gleichwinklich ist, also daß sich verhält

$$FG : FB = CD : CB,$$

d. h. $dy : dx = Cos\,x : 1$,

woraus $dy = Cos\,x \cdot dx$ hervorgeht.

Beispiel 2. Es sey $y = Cos\,x$ gegeben; man soll dy finden. — Hier ist unter derselben Voraussetzung, $CD = Cos\,x$, $CE = Cos(x + dx)$, also $dy = -DE = -BG$. — Aber aus den eben entwickelten Gründen ist noch

$$BG : BF = BD : BC,$$

d. h. $-dy : dx = Sin\,x : 1$;

folglich $dy = -Sin\,x \cdot dx$,

welches zu finden war.

---

*) Diese Figur ist die erste der Figuren des nächsten (4ten) Theils dieses Systems.

Man sieht aus diesen beiden Beispielen, wie dadurch, daß man den Bogen BF, als die Tangente in B sich dachte, und BFG als ein Dreieck, von welchem der Bogen BF selbst die Hypothenuse ist, statt des wahren Zuwachses dy, welcher noch alle höheren Potenzen von dx enthält, ein anderer gesetzt worden ist, der in der That nur das erste Glied des wahren Zuwachses hat.

Beispiel 3. Es sey $y = a^x$; und dy zu finden. — Man hat

$$y + dy = a^{x+dx} = a^x \cdot a^{dx},$$

also

$$dy = a^x \cdot (a^{dx} - 1).$$

Weiß man nun, daß nach (E. 51.)

$$a^{dx} = 1 + dx \cdot log\,a + \frac{dx^2 \cdot (log\,a)^2}{2!} + \cdots \quad \text{ist,}$$

so hat man hieraus sogleich

$$dy = a^x \cdot log\,a \cdot dx.$$

Setzt man aber diese für a^{dx} existirende Reihe nach dx, nicht als bekannt voraus, so bestimmt man den Werth von $a^{dx} - 1$, oder vielmehr die Umformung dieses Ausdrucks in einen andern von der Form $p \cdot dx$ (die höhern Potenzen von dx außer Acht lassend) etwa durch folgende Nebenbetrachtungen. Man hat

$$a^{dx} = [1 + (a-1)]^{dx},$$

also nach dem binomischen Lehrsatze

$$a^{dx} = 1 + dx \cdot (a-1) + \frac{dx \cdot (dx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{dx\,(dx-1)(dx-2)}{2 \cdot 3}(a-1)^3 + \cdots$$

folglich hieraus, weil dx im Moment des Verschwindens, also

$$dx - 1 = -1, \quad dx - 2 = -2, \text{ ꝛc. ist,}$$

$$\frac{a^{dx} - 1}{dx} = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 + \cdots$$

Weiß man nun, daß diese Reihe zur Rechten $= log\,a$ ist, so hat man sogleich wiederum $dy = a^x \cdot log\,a \cdot dx$. —

Beispiel 4. Es sey $y = log\,x$ und dy zu finden. — Man hat $dy = log(x + dx) - log\,x = log\,\frac{x+dx}{x} = log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$.

Aber $log\left(1+\frac{dx}{x}\right)=\frac{dx}{x}$, sobald man die höhern Potenzen von dx außer Acht läßt, nach (S. 51. N. 3.). Also hat man

$$dy=\frac{1}{x}\cdot dx.$$

Anmerkung 2. In allen Fällen, und also namentlich auch in den vorliegenden Beispielen, ist es aber besser (einfacher und gründlicher), wenn das Differenzial dy gebraucht werden sollte, erst nach (§. 5.) oder (§. 8.) die Ableitung ∂y zu finden, und dann

$$\partial y_x=\frac{dy}{dx} \quad \text{d. h.} \quad dy=\partial y_x\cdot dx$$

zu nehmen.

Solche Nebenbetrachtungen, wie man sie namentlich in den Beispielen (1. u. 2.) angebracht sieht, setzen nämlich voraus: 1) entweder, daß man einen richtigen Takt habe, um, wenn für den gesuchten wahren Unterschied dy ein anderer gesetzt wird, gerade den zu treffen, dem bloß die mit den höhern Potenzen von dx behafteten Glieder fehlen (oder Theile derselben) und dem nicht zugleich auch ein Theil des mit dx^1 behafteten Gliedes selbst fehlt oder noch hinzugetreten ist (welcher doch auch schon im Moment des Verschwindens seyn würde); oder 2) daß man so gewandt im Rechnen sey, um die ganze Berechnung des vollständigen Unterschiedes, wenn sie auch nicht ausgeführt wird, übersehen, und auf diese Weise sich überzeugen zu können, daß man durch diese Nebenbetrachtungen in den einzelnen Elementen und in den Zusammensetzungen derselben, wirklich nur die höhern Potenzen von dx auslasse.

Beides kann aber von dem Anfänger nicht füglich verlangt werden, abgesehen davon, daß solche Nebenbetrachtungen für jeden speziellen Fall anders seyn werden, also, die praktische jedesmal zu finden, selbst wiederum nur das Resultat längerer Uebung seyn wird, während die erste Abtheilung dieses Kapitels ihre Ableitungen alle, nach einem und demselben von dem Anfänger erfaßten und leicht anzuwendenden Gesetze, gefunden hat, oder zu finden verspricht.

§. 21. Erklärung.

Weil, wenn y eine Funktion von x ist, dann $dy=\partial y_x\cdot dx$ allemal auch wieder eine Funktion von x seyn wird, in welcher ein im Moment des Verschwindens befindlicher, und von x unabhängiger (nach x konstanter) Faktor dx erscheint, während der

andere Faktor ∂y_x eine (endliche) Funktion von x ist; so kann man von diesem Differenzial dy, wiederum das Differenzial suchen, und solches $d(dy)$ durch d^2y bezeichnen, und das zweite Differenzial von y nach x, nennen.

§. 22. Zusatz.

Ist also y eine Funktion von x, so hat man

$$1)\quad dy = \partial y_x \cdot dx$$

und $$d^2y = (\partial y_x)_{x+dx} \cdot dx - (\partial y_x)_x \cdot dx$$
$$= [(\partial y_x)_{x+dx} - (\partial y_x)_x] \cdot dx,$$

sobald man die in den eckigen Klammern befindliche Differenz $(\partial y_x)_{x+dx} - (\partial y_x)_x$ nach ganzen Potenzen von dx in eine Reihe entwickelt, nachgehends aber die höheren Potenzen von dx außer Acht läßt, wie solches die Differenzialrechnung nach (§. 19.) zu thun sich vorgenommen hat.

Es ist aber aus dem Taylorschen Lehrsatze (§. 16. N. 1.), ∂y_x statt y_x und dx statt Δx setzend, und die höhern Potenzen von dx weglassend,

$$(\partial y_x)_{x+dx} - (\partial y_x)_x = \partial(\partial y_x)_x \cdot dx = \partial^2 y_x \cdot dx \text{ (nach §. 10.)}.$$

Also, dies oben substituirend,

$$2)\quad d^2y = \partial^2 y_x \cdot dx^2 \;*)$$

oder $$3)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \partial^2 y_x.$$

Man findet also das zweite Differenzial d^2y, wenn man die zweite Ableitung $\partial^2 y_x$ noch mit dx^2 multiplizirt; oder auch: wenn man von der ersten Ableitung ∂y_x das Differenzial $d(\partial y_x)$ findet, und solches noch mit dx multiplizirt; oder auch: wenn man von dem ersten Differenzial, welches die Form $p \cdot dx$ hat, auf's neue das Differenzial nimmt, dabei aber dx als einen konstanten Faktor, und bloß den Faktor p als veränderlich ansieht.

---

*) Man verstehe unter dx^2, dx^n allemal $(dx)^2$, $(dx)^n$, und nicht $d(x^2)$, auch nicht $d(x^n)$.

§. 23. Zusatz.

Auf diese Weise erklärt man die höhern Differenzialien

$$d^3y, \quad d^4y, \quad d^5y, \ldots \quad d^ny,$$

und beweißt daß

$$d^3y = \partial^3 y_x \cdot dx^3 \quad \text{oder} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \partial^3 y_x,$$

$$d^4y = \partial^4 y_x \cdot dx^4 \quad \text{oder} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \partial^4 y_x,$$

u. s. w.; und allgemein

$$d^ny = \partial^n y_x \cdot dx^n \quad \text{oder} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \partial^n y_x$$

ist, wenn nur dx konstant ist, d. h. wenn nur x allein um dx, dagegen nicht auch zu gleicher Zeit dx um etwas wächst.

§. 24. Zusatz.

Der Taylor'sche Lehrsatz (§. 12.) kann nun ohne Ableitungszeichen auch so geschrieben werden:

$$1) \quad y_{x+h} = S\left[\frac{d^a y}{dx^a} \cdot \frac{h^a}{a!}\right];$$

oder, Δx statt h setzend,

$$2) \quad y_{x+\Delta x} = S\left[\frac{d^a y}{dx^a} \cdot \frac{\Delta x^a}{a!}\right];$$

oder, dx statt Δx setzend,

$$3) \quad y_{x+dx} = S\left[\frac{d^a y}{dx^a} \cdot \frac{dx^a}{a!}\right];$$

$$\text{d. h.} \quad y_{x+dx} = y_x + \frac{dy}{dx} \cdot dx + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{dx^3}{3!} + \ldots;$$

also auch

$$4) \quad y_{x+dx} = S\left[\frac{d^a y}{a!}\right];$$

d. h. $y_{x+dx} = y + dy + \frac{1}{2!} \cdot d^2y + \frac{1}{3!} \cdot d^3y + \cdots,$

wo jedoch, nach (§§. 22. u. 23.), dy als ein mit dx behaftetes Glied, dagegen d^2y, d^3y, d^4y, ꝛc. als, mit den Potenzen dx^2, dx^3, dx^4, ꝛc. behaftete Glieder, welche (nach §. 19.) alle gegen dy außer Acht gelassen werden sollen, angesehen werden müssen.

§. 25. Zusatz.

Und eben so kann auch nun die Maclaurin'sche Reihe ohne Ableitungszeichen geschrieben werden, sobald man die Formeln der (§§. 22. u. 23.) zu Hilfe nimmt. Man hat nämlich:

$$1)\quad y_x = S\left[\left(\frac{d^{\mathfrak{a}}y}{dx^{\mathfrak{a}}}\right)_0 \cdot \frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]$$

und

$$2)\quad y_x = S\left[\left(\frac{d^{\mathfrak{a}}y}{dx^{\mathfrak{a}}}\right)_a \cdot \frac{(x-a)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right],$$

wo die unten rechts angehängte 0 oder a andeuten, daß nach geschehener Differenzirung (d. h. Auffindung von $d^{\mathfrak{a}}y$), und nachdem man durch $dx^{\mathfrak{a}}$ wegdividirt hat, in der ersten Formel 0, in der andern aber a statt x gesetzt werden soll.

Dieselben Formeln, ohne Aggregate geschrieben, sehen aber so aus

$$3)\quad y_x = (y)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cdot x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$4)\quad y_x = (y)_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot (x-a) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_a \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

Schlußanmerkung.

Man bemerkt hier sogleich eine Bestätigung der Note unten zu (§. 19.). Sowohl in dem Taylor'schen als in dem Maclaurin'schen Lehrsatze gebraucht man ursprünglich, den (§§. 12—14.) zu Folge, zu Koeffizienten der Reihe die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$,

welche hier durch die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. ꝛc. ersetzt sind; damit aber $\frac{dy}{dx}$ mit ∂y_x genau identisch werde, muß dy genau $\partial y_x \cdot dx$ seyn. Werden daher zum Behufe dieser Taylor'schen und Maclaurin'schen Sätze, für speziell gegebene Funktionen, die Differenzialien dy, d^2y, ꝛc. ꝛc. gesucht, so sucht man in der That die vollständigen Aenderungen nicht, sondern wirklich nur den Theil $\partial y_x \cdot dx$ dieser Aenderung, welcher nachgehends durch dx dividirt, genau die Ableitung ∂y_x, d. h. den gesuchten Koeffizienten der Reihen gibt. Wenn man daher bei dem Aufsuchen der Aenderung dy wirklich, im Sinne der Differenzialrechnung, die höhern Potenzen von dx außer Acht läßt, so bekommt man zwar nicht genau den ganzen Zuwachs dy, aber genau das, was man dasmal unter dy wirklich zu verstehen hatte.

Uebrigens empfehlen wir dem Anfänger, sich zunächst nur mit der gründlichsten Erlernung der Ableitungsrechnung zu befassen, und das über die Differenzialrechnung vom (§. 19.) an Gesagte, vorerst ungelesen zu lassen, weil die Differenzialrechnung nur eine andere (geschichtliche) Form der erstern ist, und weil diese Form nachgehends in den einzelnen Fällen, wo solches gewünscht werden dürfte, allemal sehr schnell hervorgebracht werden kann; endlich weil die Differenzialrechnnng (also diese eigene Form der Rechnung) in der That ganz überflüssig ist, und keine Anwendung solche nothwendig erfordert; so daß sie also höchstens nur, nachdem man sie wohl erfaßt und vor den, durch die sich widersprechende Zweideutigkeit des Differenzials möglicher Weise veranlaßten Irrthümern, dnrch Uebung, und durch die dabei erworbene Gewandtheit und praktischen Takt gesichert hat, dem Praktiker in einzelnen Fällen einige Bequemlichkeit gewährt, welche jedoch ein gewandter Analyst auch bei dem bloßen Anwenden der Ableitungsrechnung nicht gerade vermißt; während letztere Rechnung dagegen, in andern Fällen der Anwendung, ebenfalls ihre praktische Bequemlichkeit vor der Differenzialrechnung voraus hat.

Dritte Abtheilung.

Methode der Grenzen.

Es gibt noch eine dritte Ansicht dieser hier in Rede stehenden Rechnungen, bekannt unter dem Namen der „Methode der Grenzen“ oder der „Theorie der Grenzen“, welche wir hier noch etwas näher betrachten wollen.

Nro. I.

Es geht nämlich diese „Methode der Grenzen“ ebenfalls von dem Satze aus, daß $y_{x+\Delta x}$ in eine nach positiven Potenzen von Δx fortlaufende Reihe sich entwickeln lasse, also daß

$$\Delta y = p \cdot \Delta x + q \cdot \Delta x^{\alpha+1} + r \cdot \Delta x^{\beta+1} + \cdots$$

oder $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q \cdot \Delta x^{\alpha} + r \cdot \Delta x^{\beta} + \cdots$$

wird, während Δx, Δy die von einander abhängigen Zuwachse von x und y sind. Sie sagt dies aber nicht offen, sondern indirekt dadurch, daß sie festsetzt: „es gäbe allemal einen Ausdruck p, welchem sich das Verhältniß der Zuwachse Δy und Δx (d. h. der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) immer mehr und ohne Ende nähere, je kleiner Δx selbst gedacht wird.“ — Gesteht sie die Existenz der gedachten Reihe für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, offen zu, so kann sie diese Behauptung mit Recht aufstellen, daß nämlich dieses Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder $\Delta y : \Delta x$, dem p zur Rechten sich ohne Aufhören immer mehr und mehr nähere, je kleiner Δx gedacht wird, während die zur Rechten stehende Reihe für $\Delta x = 0$, in p selbst übergehe, (vgl. §§. 16. 17. und Note dazu), und das Hauptprinzip dieser Methode ist dadurch wirklich außer Zweifel gesetzt. — Das erste Glied p der Reihe zur Rechten ist daher die Grenze des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$, d. h. die Grenze, welcher sich dieser

Quotient (dieses Verhältniß) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, immer mehr und ohne Aufhören nähert, je kleiner Δx gedacht ist; die Grenze von welcher dieses Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zuletzt, wenn Δx im Moment des Verschwindens ist, selber nur um etwas verschieden ist, was sich im Moment des Verschwindens befindet, welche endlich aus der mit dem Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ identischen Reihe

$$p + q \cdot \Delta x^{\alpha} + r \cdot \Delta x^{\beta} + \cdots,$$

genau hervorgeht, wenn $\Delta x = 0$ gesetzt wird. Dieses p nun nennt diese Methode den Differenzial-Koeffizienten, und bezeichnet ihn durch das Zeichen $\frac{dy}{dx}$, so daß also dieser Differenzial-Koeffizient $\frac{dy}{dx}$ vollkommen identisch ist mit der Ableitung ∂y_x, wenigstens so oft man sich alles reel denkt.*)

Nro. II.

Diese Methode der Grenzen findet daher ihren Differenzial-Koeffizienten $\frac{dy}{dx}$, indem sie den Werth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ an seiner Grenze nimmt, d. h. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$, also genau so, wie die Ableitung ∂y_x nach (§. 8.) gefunden wurde.**)

Sie unterscheidet sich aber in dem Gange der Entwickelung öfters und in so weit von der Ableitungsrechnung, als letztere den Werth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$, allemal dadurch findet,

---

*) Da mit ganz allgemeinen Ausdrücken (d. h. mit solchen die noch nicht reel und noch nicht imaginär sind) zu rechnen, das Hauptерforderniß des Analysten ist, so ist wiederum schon in dieser Beziehung die Ableitungsrechnung besser als die Methode der Grenzen.

**) Was (§. 8.) h ist, wird hier durch Δx vorgestellt, während Δy die Differenz $y_{x+h} - y_x$ bedeutet.

daß sie Δy zuvor wirklich in eine nach ganzen Potenzen von Δx fortlaufende Reihe verwandelt, von der Form

$$p \cdot \Delta x + q \cdot \Delta x^2 + r \cdot \Delta x^3 + \cdots,$$

dann diese Reihe für Δy, durch Δx wirklich wegdividirt, und zuletzt erst $\Delta x = 0$ setzt; während die „Methode der Grenzen" sich öfter erlaubt, das was aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ (oder richtiger, das was aus

$$\frac{p \cdot \Delta x + q \cdot \Delta x^2 + r \cdot \Delta x^3 + \cdots}{\Delta x}$$

d. h. aus $$p + q \cdot \Delta x + r \cdot \Delta x^2 + \cdots$$

für $\Delta x = 0$) wird, durch andere Betrachtungen sich zu verschaffen, ohne diese Umformung von Δy in eine nach Δx fortlaufende Reihe wirklich vorzunehmen.

Ist z. B. $$y = Sin\, x,$$
so ist

$$\Delta y = Sin(x + \Delta x) - Sin\, x = Sin\, x \cdot (Cos\, \Delta x - 1) + Sin\, \Delta x \cdot Cos\, x$$

also I. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Sin\, x \cdot \frac{Cos\, \Delta x - 1}{\Delta x} + Cos\, x \cdot \frac{Sin\, \Delta x}{\Delta x}.$$

Man schließt nun so: Weil, je kleiner z ist, desto näher $Sin\, z$ mit dem Bogen z zusammenfällt, also desto näher $Sin\, z = z$, oder $\frac{Sin\, z}{z} = 1$ wird, so wird an der Grenze d. h. für $\Delta x = 0$, $\frac{Sin\, \Delta x}{\Delta x} = 1$. — Und weil $Cos\, \Delta x - 1 = -2(Sin\, \frac{1}{2}\Delta x)^2$, also

$$\frac{Cos\, \Delta x - 1}{\Delta x} = -\, Sin\, \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \frac{Sin\, \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

ist, aber an der Grenze d. h. für $\Delta x = 0$, $\frac{Sin\, \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$, dagegen $Sin\, \frac{1}{2}\Delta x = 0$ wird, so ist an der Grenze d. h. für $\Delta x = 0$, offenbar $\frac{Cos\, \Delta x - 1}{\Delta x} = 0$; und es geht daher die Gleichung (I.) an der Grenze, d. h. für $\Delta x = 0$, in

II. $$\frac{dy}{dx} = Cos\, x$$ über.

Nro. III.

Das, wodurch sich die „Methode der Grenzen" in dem Gange ihrer Entwickelung, von der Ableitungsrechnung unterscheidet, ist aber nicht immer ihre empfehlenswerthe Seite, wenn sie auch zuweilen größere Kürze in der Behandlung zu verstatten scheint; weil häufig gerade dadurch ein Mangel an Strenge und an der, den Anfänger zu befriedigenden Ueberzeugung eintritt, der nur dadurch gehoben werden kann, daß man die Entwickelung von Δy, in eine nach Δx, fortlaufende Reihe wirklich vornimmt, folglich zu dem Verfahren der Ableitungsrechnung zurückkehrt. — Es trifft sogar diese Methode hinsichtlich dieser Abweichung in ihrem Gange, alles das, was (§. 20. Anmerkung 2.) zum Nachtheil der Differenzialrechnung gesagt werden mußte, während sie jedoch vor der Differenzialrechnung ihre reinen und völlig bestimmten, keinen Doppelsinn zum Grunde habenden Begriffe, nämlich genau die der Ableitungsrechnung, voraus hat.

Um dies an dem Beispiele zu (Nro. II.) noch zu veranschaulichen bedarf es vielleicht nur der Bemerkung, daß der Anfänger den Quotienten $\frac{Cos\,\Delta x - 1}{\Delta x}$ an der Grenze d. h. für $\Delta x = 0$ leicht auch so hätte behandeln können, nämlich: Da $Cos\,\Delta x$ desto näher der 1 rückt, je näher Δx der Null, übrigens aber immer kleiner ist als 1, so ist $1 - Cos\,\Delta x$ mit Δx zugleich immer positiv, aber desto näher der Null, je kleiner Δx. Also rücken $1 - Cos\,\Delta x$ und Δx selbst einer und derselben Grenze (nämlich der Null) immer näher und näher, daher $\frac{1 - Cos\,\Delta x}{\Delta x}$ der 1 immer näher und näher, mithin ist an der Grenze d. h. für $\Delta x = 0$,

$$\frac{1 - Cos\,\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{Cos\,\Delta x - 1}{\Delta x} = -1$$

und nicht $= 0$, (wie oben gefunden worden ist).

Wir wissen nun zwar recht gut, daß dieses Verfahren dasmal nicht richtig ist; aber woher wissen wir es? — Weil wir uns $Cos\,\Delta x$ in, nach Δx fortlaufende Reihen entwickelt denken, daher

$$Cos\,\Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\Delta x^4}{4!} - \cdots,$$

mithin

$$\frac{Cos\,\Delta x - 1}{\Delta x} = -\frac{1}{2!}\cdot\Delta x + \frac{1}{4!}\cdot\Delta x^3 - \ldots$$

haben, und nun gar klar einsehen, daß dieser Ausdruck zur Rechten 0 wird, sobald man $\Delta x = 0$ setzt. — Eben so denken wir uns

$$Sin\,\Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\Delta x^5}{5!} - \ldots,$$

also

$$\frac{Sin\,\Delta x}{\Delta x} = 1 - \frac{1}{3!}\cdot\Delta x^2 + \frac{1}{5!}\cdot\Delta x^4 - \ldots,$$

und nun fällt dem allerersten Anfänger völlig befriedigend in die Augen, daß dieser Ausdruck zur Rechten in 1 übergeht, sobald $\Delta x = 0$ gesetzt wird.

Allein dann hat man auch genau das Verfahren der Ableitungsrechnung.

Nro. IV.

Uebrigens muß die „Methode der Grenzen" ihren Differenzial-Koeffizienten $\frac{dy}{dx}$, will sie konsequent seyn, entweder als ein einziges, ∂y_x vorstellendes Zeichen, handhaben, in welchem dy und dx allein gar keine Bedeutung haben, so daß $\frac{dy}{dx}$ nur eine andere Schreibweise für ∂y_x ist; oder sie muß, will sie unter dx einen an der Grenze (d. h. im Moment des Verschwindens) befindlichen Zuwachs verstehen, unter dy nicht den ganzen dadurch hervorgehenden Zuwachs von y, sondern nur das erste Glied $\partial y_x \cdot dx$ dieses Zuwachses (der ganze Zuwachs ist in der That $= \partial y_x \cdot dx + \partial^2 y_x \cdot \frac{dx^2}{2!} + \cdots\cdot$) verstehen, wenn sie nicht zu gleicher Zeit in den Fehler des Doppelsinns der Differenzialien, der an der Differenzialrechnung gerügt werden mußte, fallen, und dann mit der Differenzialrechnung ein und dasselbe seyn will, welcher letztere Fehler in den bekanntern Vorträgen dieser Methode der Grenzen, nicht immer mit gleichem Glücke vermieden wird, obwohl aber leicht vermieden werden kann.

Nro. V.

Und wollte die „Methode der Grenzen" dx nicht mehr bloß im Moment des Verschwindens sich denken, sondern wirklich unter dx den Zuwachs Δx verstehen, wenn er schon $= 0$ geworden ist, so verfiele sie in den Fehler der Nullenrechnung; und es gienge ihr dann in den Anwendungen jeder Vortheil ab, den sie bewahrt, wenn sie im Sinne der Ableitungsrechnung $\frac{dy}{dx}$ als eine Funktion von x verstehen wollte, die aus y selbst auf die vorgeschriebene Weise erhalten wird, und dabei die einzelnen dx, dy gar nicht berücksichtigen möchte, sondern $\frac{dy}{dx}$ als ein ganzes unzertrennbares Zeichen ansähe, dessen Bedeutung jedoch aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auf die gedachte Weise hervorgeht.

Die Geschichte der „Methode der Grenzen" lehrt uns aber, daß sie gewöhnlich dx als einen im Moment des Verschwindens befindlichen Zuwachs ansieht, und dy als das erste Glied ($= \partial y_x \cdot dx$) des zugehörigen Zuwachses von y, — welches letztere zwar theoretisch erlaubt ist, aber in dem Verfolge der Untersuchungen Unbequemlichkeiten gewährt, von denen hier nur eine einzige angedeutet seyn mag, nämlich die, daß in $\frac{dx}{dy}$ das dx eine andere Bedeutung hat, als in $\frac{dy}{dx}$, so daß man z. B. ohne vorhergegangenen Beweis nicht die Gleichung

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$$

hinschreiben darf. — In $\frac{dy}{dx}$ nämlich bedeutet dx den ganzen Zuwachs von x; in $\frac{dx}{dy}$ dagegen bedeutet dx nur das erste Glied des ganzen Zuwachses.*)

---

*) Der Beweis dieses Satzes ist zwar sehr leicht zu führen, näm-

Nro. VI.

Da endlich unser Begriff der Ableitung, nach (§§. 16. 17.), den Grenzwerth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (für $\Delta x = 0$) in sich schließt, so gewährt unsere Ableitungsrechnung in ihrer Anwendung alle die Vortheile, welche aus dieser Eigenschaft der Ableitungen hervorgehen, ohne daß wir uns jedoch zu erlauben wagten oder nöthig hätten, den einfachen unabänderlichen Gang in der Entwickelung der Ableitungen und der Ableitungsrechnung, durch irgend welche Nebenbetrachtungen zu stören.

Daher bleiben wir zunächst noch immer bei der Ableitungsrechnung stehen, als derjenigen Ansicht, welche Einfachheit und Leichtigkeit der Behandlung, völlig befriedigende Ueberzeugung (in der Theorie, wie in der Anwendung) und Bequemlichkeit in der Anwendung, gleichmäßig in sich zu vereinigen erlaubt, sobald man es nur in ihrer Darstellung mit Ernst darauf anlegen will.*)

---

lich so: Es ist gewiß

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

folglich für $\Delta x = 0$ auch

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}.$$

Den Anfänger werden aber Zeichen verwirren, welche wiederkehrend verschiedene Bedeutungen haben, deren Unterschied so subtil ist, daß er leichtlich und oft ganz unbemerkt bleiben mag.

*) In den Anwendungen auf die Raumgrößen- und Kraftgrößen-Lehre, von denen wir einige im Anhange zum nächsten 4ten Theile dieses Systems beibringen wollen, sollen diese 3 Methoden (die Ableitungsrechnung, die Differenzialrechnung, und die Methode der Grenzen) noch einmal mit einander in Vergleichung gestellt werden.

Höhere Zahlenlehre.

Zweites Kapitel.

Von den höhern Ableitungen und Parzial-Differenzialien nach mehren Veränderlichen. Systematische Ableitungs- und Differenziirungs-Methode für alle möglichen entwickelt gegebenen Funktionen.

Erste Abtheilung.

Von den höhern Ableitungen nach mehren Veränderlichen. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz für Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen.

§. 26. Erklärung.

Ist f ein Ausdruck, welcher x, y, z, ꝛc. ꝛc. enthält, so kann er durch $f_{x,y,z,\text{ꝛc.}}$ bezeichnet werden. Er wird aber durch f_x bezeichnet, wenn man ihn bloß als eine Funktion von x ansehen will, und

$$\partial f_x,\ \partial^2 f_x,\ \partial^3 f_x, \cdots \partial^a f_x, \cdots$$

stellen dann seine Ableitungen nach x vor. — Derselbe Ausdruck f wird dagegen durch f_y bezeichnet, wenn man andeuten will, daß er jetzt bloß als eine Funktion von y angesehen werden soll; und

$$\partial f_y,\ \partial^2 f_y,\ \partial^3 f_y, \cdots \partial^a f_y, \cdots$$

stellen jetzt seine Ableitungen nach y vor. — Eben so stellen

$$\partial f_z,\ \partial^2 f_z,\ \partial^3 f_z, \ldots\ \partial^a f_z, \ldots$$

seine Ableitungen nach z vor, den Ausdruck f selber als bloße Funktion von z verstanden; u. s. w. f.

Allein die eben beschriebenen Ableitungen nach x, nach y, oder nach z, ꝛc. ꝛc., sind, ihrer (§. 8.) beschriebenen Entstehungsweise gemäß, in der Regel selber wieder Ausdrücke, welche x, y, z, ꝛc. zugleich enthalten, und von deren jeder also wieder die Ableitungen nach x, nach y, nach z, u. s. w. genommen gedacht werden können, während letztere wiederum Ausdrücke seyn werden, die x,y,z, ꝛc. enthalten, so daß von jeder dieser letztern wiederum die Ableitungen, bald nach x, bald nach y, bald nach z, ꝛc. gesucht werden können; u. s. w. f. — Wir bezeichnen daher in der Folge durch

$$\partial^{a,b,c} f_{x,y,z},$$

das was herauskommt, wenn von f zuerst genommen wird, die $a$te Ableitung nach x, von dieser letzten nach und nach wiederum b Ableitungen nach y, und von der letztern, $b$ten Ableitung nach y, wiederum die $c$te Ableitung nach z gedacht ist; und wir nennen dieses Zeichen eine **Ableitung der** $(a+b+c)$**ten Ordnung**.

Die Bedeutungen von

$$\partial^{m,n} f_{y,z};\quad \partial^{m,n} f_{z,x};\quad \partial^{m,n,p,q} f_{x,y,z,u};\quad \text{u. s. w. f.}$$

sind dem eben Gesagten analog zu verstehen.

Endlich sollen die Zeichen

$$\partial^{0,a,b} f_{x,y,z},\quad \partial^{a,0,b} f_{x,y,z},\quad \partial^{0,b,0} f_{x,y,z},\quad \text{ꝛc.}$$

vollkommen identisch genommen werden, mit beziehlich

$$\partial^{a,b} f_{y,z},\quad \partial^{a,b} f_{x,z},\quad \partial^{b} f_{y},\quad \text{ꝛc.}$$

Beispiele. Es bedeutet also die Ableitung der 3ten Ordnung $\partial^{2,1} f_{y,z}$, den Ausdruck der entsteht, wenn aus f zuerst ∂f_y, dann daraus wieder $\partial^2 f_y$ gefunden wird, und daraus noch $\partial(\partial^2 f_y)_z$, d. h. die Ableitung von $\partial^2 f_y$ nach z.

Dagegen bedeutet $\partial^{2,1} f_{z,y}$ das was man erhält, wenn aus f zu-

erst ∂f_z, daraus noch $\partial^2 f_z$, und hieraus wiederum $\partial(\partial^2 f_z)_y$ gefunden wird.

Eben so bedeutet $\partial^{1,2} f_{y,z}$ das, was herauskommt, wenn man zuerst ∂f_y findet, dann daraus noch $\partial(\partial f_y)_x$, so wie hieraus wiederum $\partial^2(\partial f_y)_x$.

Es sey $f = Ax^3y^4z^2 - Bxy^2z^3$, so hat man, um die Bedeutung von $\partial^{2,1,2} f_{y,z,x}$ zu finden, zuerst zu nehmen, nach (§§. 9. 10. 6.)

$$\partial f_y = 4Ax^3y^3z^2 - 2Bxyz^3;$$

dann hiervon wiederum die Ableitung nach y, nämlich

$$\partial^2 f_y = 12Ax^3y^2z^2 - 2Bxz^3;$$

hiervon wiederum die Ableitung nach z, d. h.

$$\partial^{2,1} f_{y,z} = 24Ax^3y^2z - 6Bxz^2;$$

hieraus noch die Ableitung nach x, nämlich

$$\partial^{2,1,1} f_{y,z,x} = 72Ax^2y^2z - 6Bz^2;$$

und zuletzt hiervon nochmals die Ableitung nach x, d. h.

$$\partial^{2,1,2} f_{y,z,x} = 144Axy^2z;$$

in so ferne $6Bz^2$ nach x konstant, also dessen Ableitung nach x, Null ist.

Dagegen würde man finden $\partial^{2,1,2} f_{x,y,z}$ auf folgende Art, immer (§§. 10. 6.) zu Hülfe nehmend:

$$\partial f_x = 3Ax^2y^4z^2 - By^2z^3;$$

$$\partial^2 f_x = 6Axy^4z^2;$$

$$\partial^{2,1} f_{x,y} = 24Axy^3z^2;$$

$$\partial^{2,1,1} f_{x,y,z} = 48Axy^3z;$$

endlich

$$\partial^{2,1,2} f_{x,y,z} = 48Axy^3.$$

§. 27. Aufgabe.

Es ist f eine Funktion von x und y; also $f_{x,y}$. Es wird das was aus ihr hervorgeht, wenn man $x + \Delta x$ statt x und zu gleicher Zeit $y + \Delta y$ statt y setzt, durch $f_{x+\Delta x, y+\Delta y}$ be-

zeichnet. Man soll letzteres in eine Reihe verwandeln, welche nach ganzen Potenzen von Δx und Δy fortläuft.

Auflösung.

Setzt man in $f_{x,y}$ zuerst bloß $y+\Delta y$ statt y, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 12.)

$$1)\quad f_{x,y+\Delta y} = S\left[\partial^b f_y \cdot \frac{\Delta y^b}{b!}\right],$$

wo jeder der Koeffizienten $\partial^b f_y$ selber wieder eine Funktion von x und y ist. Wird nun noch $x+\Delta x$ statt x gesetzt, so erhält man aus (1.):

$$2)\quad f_{x+\Delta x,y+\Delta y} = S\left[(\partial^b f_y)_{x+\Delta x} \cdot \frac{\Delta y^b}{b!}\right].$$

Weil aber $(\partial^b f_y)_{x+\Delta x}$ das bedeutet, was aus der durch $\partial^b f_y$ vorgestellten Funktion von x wird, wenn man $x+\Delta x$ statt x setzt, so hat man wiederum nach demselben Taylor'schen Lehrsatze (§. 12.)

$$3)\quad (\partial^b f_y)_{x+\Delta x} = S\left[\partial^{b,a} f_{y,x} \cdot \frac{\Delta x^a}{a!}\right].$$

Folglich, wenn man diesen Werth in (2.) substituirt

$$4)\quad f_{x+\Delta x,y+\Delta y} = S\left[\partial^{b,a} f_{y,x} \cdot \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b}{a!\; b!}\right],$$

welches die gesuchte Reihe ist, in welchem Aggregat zur Rechten auch noch $a+b=c$ genommen werden kann, wenn man nachgehends [0,1,2,3, ꝛc. statt c setzend, und, während c einen bestimmten Werth hat, für a und b alle möglichen Werthe in 0 und ganzen Zahlen, welche der Gleichung $a+b=c$ genügen, nehmend] die Glieder der Reihe selbst so geordnet sehen will, daß immer diejenigen hinter einander erscheinen, welche Δx und Δy in derselben $c$ten Dimension enthalten, oder welche allemal mit Ableitungen der $c$ten Ordnung multiplizirt erscheinen.

§. 28. Zusatz.

Hätte man umgekehrt zuerst $x+\Delta x$ statt x und nachge=

hends noch $y+\Delta y$ statt y gesetzt, und jedesmal den Taylor'schen Lehrsatz (§. 12.) angewandt, so hätte man noch erhalten

$$5)\quad f_{x+\Delta x, y+\Delta y} = S\left[\partial_{a,b} f_{x,y}\cdot\frac{\Delta x^a\cdot\Delta y^b}{a!\; b!}\right],$$

Weil aber beide, in (4.) und in (5.) enthaltenen Reihen, für jeden Werth von Δx und Δy einander identisch seyn müssen, so müssen auch die, einerlei Potenz $\Delta x^a\cdot\Delta y^b$ affizirenden Koeffizienten in beiden einander gleich seyn; uud da ergibt sich der merkwürdige und wichtige Satz, daß nämlich

$$\partial^{b,a} f_{y,x} = \partial^{a,b} f_{x,y} \qquad \text{ist;}$$

d. h. es ist einerlei, ob man von einer Funktion f zuerst bmal hinter einander die Ableitung nimmt nach y, und dann von dem letztern Resultat noch amal hinter einander die Ableitung nach x; oder ob man in umgekehrter Ordnung verfährt, nämlich zuerst amal hinter einander die Ableitung von f nach x findet, und von dieser aten Ableitung nach x, erst noch die bte Ableitung nach y nimmt.

§. 29. Zusatz.

Der Taylor'sche Satz für 2 Variable.

Die Gleichungen (4. §. 27. u. 5. §. 28.) sind also dieselben und zwar die folgende:

$$1)\quad f_{x+\Delta x, y+\Delta y} = S\left[\partial^{a,b} f_{x,y}\cdot\frac{\Delta x^a\cdot\Delta y^b}{a!\; b!}\right].$$

Setzt man aber hier $a+b=c$, und bemerkt man, daß dann $\frac{1}{a!\; b!} = \frac{(a+b)!}{a!\; b!}\cdot\frac{1}{c!}$ ist, so wird dieselbe Gleichung auch so aussehen können:

$$2)\quad f_{x+\Delta x, y+\Delta y} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\; b!}\cdot\partial^{a,b} f_{x,y}\cdot\frac{\Delta x^a\cdot\Delta y^b}{c!}\right]_{a+b=c},$$

wo $\frac{(a+b)!}{a!\; b!}$, d. h. $\frac{(a+b)^{b|-1}}{b!}$, d. h. $\frac{(a+b)^{a|-1}}{a!}$,

d. h. $(a+b)_b$, d. h. $(a+b)_a$, c_b oder $\frac{c^{b|-1}}{b!}$ der bei dem binomischen Lehrsatze (d. h. bei der Entwickelung der Potenz $(a+b)^c$) vorkommende Binomial-Koeffizient ist.

Schreibt man in den Gleichungen (1. u. 2.) statt der Repräsentanten aller Glieder, die erstern Glieder allein, so erhält man, wenn $a+b=c$ gedacht, statt c nach und nach 0,1,2,3,4, 2c. gesetzt, und für jeden Werth von c, für

$$\left.\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right| \text{ die Werthe } \begin{array}{llllllll} c, & c-1, & c-2, & c-3, \cdots & 3, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 3, \cdots & c-3, & c-2, & c-1, & c \end{array}$$

gesetzt werden, so lange solche nämlich 0 oder ganze Zahlen sind, aus (1.): *)

$$3)\quad f_{x+\Delta x,y+\Delta y}$$
$$\begin{array}{llllll} = f_{x,y} & + \partial f_x \cdot \Delta x & + \frac{1}{2}\partial^2 f_x \cdot \Delta x^2 & + \frac{1}{6}\cdot\partial^3 f_x \cdot \Delta x^3 & + \cdots \\ & + \partial f_y \cdot \Delta y & + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y & + \frac{1}{2}\cdot\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta y & + \cdots \\ & & + \frac{1}{2}\partial^2 f_y \cdot \Delta y^2 & + \frac{1}{2}\cdot\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y^2 & + \cdots \\ & & & + \frac{1}{6}\cdot\partial^3 f_y \cdot \Delta y^3 & + \cdots \\ & & & & + \cdots \end{array}$$

und aus (2.):

$$4)\quad f_{x+\Delta x,y+\Delta y}$$
$$\begin{array}{llllll} = f_{x,y} & + \partial f_x \cdot \Delta x & + \partial^2 f_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} & + \partial^3 f_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} & + \cdots \\ & + \partial f_y \cdot \Delta y & + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2!} & + 3\partial^{2,1} f \cdot \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{3!} & + \cdots \\ & & + \partial^2 f_y \cdot \frac{\Delta y^2}{2!} & + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y^2}{3!} & + \cdots \\ & & & + \partial^3 f_y \cdot \frac{\Delta y^3}{3!} & + \cdots \\ & & & & + \cdots \end{array}$$

und diese Gleichungen bilden den Taylor'schen Lehrsatz für zwei Veränderliche.

---

*) Unter Δx^2, Δy^2, Δx^n 2c. wird immer verstanden $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$, $(\Delta x)^n$, 2c. und nie $\Delta(x^2)$, $\Delta(y^2)$, $\Delta(x^n)$, 2c. 2c.

§. 30. Zusatz.

Der Taylor'sche Satz für 3 und mehr Veränderliche.

Auf diese Weise kann man aber auch, wenn f eine Funktion von x, y und z ist, $f_{x+\Delta x, x+\Delta y, z+\Delta z}$ in eine Reihe entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von Δx, Δy und Δz fortläuft; den einfachen Taylor'schen Lehrsatz 3mal hinter einander in beliebiger Folge anwendend; und man macht dabei folgende Bemerkungen:

1) Es ist, weil man immer dieselbe Reihe für $f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z}$ bekommen muß, offenbar

$$\partial^{a,b,c} f_{x,y,z} = \partial^{a,c,b} f_{x,z,y} = \partial^{b,a,c} f_{y,x,z} = \partial^{b,c,a} f_{y,z,x}$$
$$= \partial^{c,a,b} f_{z,x,y} = \partial^{c,b,a} f_{z,y,x}.$$

2) Und man erhält dann

$$f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z} = S\left[\partial^{a,b,c} f_{x,y,z} \cdot \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b \cdot \Delta z^c}{a!\ b!\ c!}\right]$$
$$= f_{x,y,z} + \partial f_x \cdot \Delta x + \partial f_y \cdot \Delta y + \partial f_z \cdot \Delta z + \left\{\begin{array}{l}\text{die Glieder der 2ten und}\\ \text{höhern Dimensionen}\\ \text{von } \Delta x,\ \Delta y \text{ und } \Delta z.\end{array}\right\}$$

3) Derselbe Satz kann aber auch so geschrieben werden:

$$f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z} = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!} \cdot \partial^{a,b,c} f_{x,y,z} \cdot \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b \cdot \Delta z^c}{d!}\right]_{a+b+c=d},$$

wo der erste Faktor $\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!}$ derselbe ist, welcher bei der $d$ten Potenz eines Trinomimus $a+b+c$ ebenfalls erscheint, und welche Form bequemer ist als die vorige (in N. 2.), so oft man die Glieder der Reihe sogleich nach den verschiedenen Dimensionen von Δx, Δy, Δz geordnet sehen will, in so ferne nur nach und nach 0,1,2,3, rc. statt d, und, während d einen bestimmten dieser Werthe hat, wiederum statt a, b, c, alle möglichen Werthe gesetzt werden dürfen und müssen, welche 0 und ganze Zahlen sind, und welche der Gleichung $a+b+c=d$ genügen.

Dieser Satz kann aber der Taylor'sche Lehrsatz für 3

Veränderliche genannt werden; und dabei ist leicht einzusehen, wie derselbe auf Funktionen von beliebig viel Veränderlichen kann ausgedehnt werden.

§. 31. Zusatz.

Der Maclaurin'sche Satz für 2, 3, oder mehr Veränderliche.

Setzt man in den Formeln (§. 29. u. §. 30.) a statt x, b statt y und c statt z, so wie x—a statt Δx, y—b statt Δy, und z—c statt Δz, so ergibt sich noch:

$$1)\quad f_{x,y} = S\left[(\partial^{a,b} f_{x,y})_{a,b} \cdot \frac{(x-a)^a \cdot (y-b)^b}{a!\; b!}\right];$$

$$2)\quad f_{x,y,z} = S\left[(\partial^{a,b,c} f_{x,y,z})_{a,b,c} \cdot \frac{(x-a)^a \cdot (y-b)^b \cdot (z-c)^c}{a!\; b!\; c!}\right];$$

u. s. w. f.;

in welchen Gleichungen die einzelnen Koeffizienten zwar aus f durch Ableitungen nach x, und nach y rc. entstanden sind, aber nicht mehr x und y und rc. enthalten, weil a statt x, b statt y, u. s. w. gesetzt worden ist.

Diese Formeln bilden aber den allgemeineren Maclaurin'schen Lehrsatz für 2, 3 oder mehre Veränderliche; während aus denselben der gemeine Maclaurin'sche Lehrsatz für 2, 3 oder mehr Veränderliche hervorgeht, wenn $a = b = c = 0$ gesetzt wird.

§. 32. Zusatz.

Eine andere Umformung des Taylor'schen Lehrsatzes für 1, 2 und mehr Veränderliche, die später wichtig wird, ist die, wo man Δx, Δy, Δz, rc. rc. durch ein beliebiges $\varkappa$ dividirt, und die Quotienten durch δx, δy, δz, rc. rc. bezeichnet, so daß man hat $\Delta x = \varkappa \cdot \delta x$, $\Delta y = \varkappa \cdot \delta y$, $\Delta z = \varkappa \cdot \delta z$, rc. rc., also z. B. $\Delta x^a \cdot \Delta y^b = \delta x^a \cdot \delta y^b \cdot \varkappa^{a+b}$;

$$\Delta x^a \cdot \Delta y^b \cdot \Delta z^c = \delta x^a \cdot \delta y^b \cdot \delta z^c\, \varkappa^{a+b+c}.$$

Die Formeln (§. 12. §. 29. §. 30.) werden nun folgende Gestalt annehmen:

1) $f_{x+\varkappa\cdot\delta x} = S\left[\partial^{a} f_x \cdot \delta x^{a} \cdot \frac{\varkappa^{a}}{a!}\right];$

2) $f_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\; b!} \cdot \partial^{a,b} f_{x,y} \cdot \delta x^{a} \cdot \delta y^{b} \cdot \frac{\varkappa^{c}}{c!}\right]_{a+b=c};$

3) $f_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y,\, z+\varkappa\cdot\delta z}$

$$= S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\; b!\; c!} \cdot \partial^{a,b,c} f_{x,y,z} \cdot \delta x^{a} \cdot \delta y^{b} \cdot \delta z^{c} \cdot \frac{\varkappa^{d}}{d!}\right]_{a+b+c=d};$$

u. s. w. f., wo $\frac{(a+b)!}{a!\; b!}$, $\frac{(a+b+c)!}{a!\; b!\; c!}$, die Koeffizienten sind, eines Binomiums $(a+b)$ in die $a+b=c$te Potenz, oder eines Trinomiums $a+b+c$ in die $a+b+c=d$te Potenz u. s. w. f.

Diese Reihen sind als solche anzusehen, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen, und welche aus den Repräsentanten aller Glieder dadurch erhalten werden, daß man statt c in (2.) und statt d in (3.) &c., nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c., und alle ganzen Zahlen und, während c in (2.), oder d in (3.) irgend einen Werth hat, statt a und b in (2.) oder statt a, b, c, in (3.), 0 und alle möglichen ganzen Zahlen setzt, welche der Gleichung $a+b=c$ (in 2.), oder der Gleichung $a+b+c=d$ (in 3.) genügen. — Sie bekommen dann in ihren ersten Gliedern folgende Gestalt:

4) $f_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y}$

$$= f_{x,y} + \left|\begin{array}{l} \partial f_x \cdot \delta x \\ + \partial f_y \cdot \delta y \end{array}\right| \cdot \varkappa + \left|\begin{array}{l} \partial^2 f_x \cdot \delta x^2 \\ + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y \\ + \partial^2 f_y \cdot \delta y^2 \end{array}\right| \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdot$$

5) $f_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y,\, z+\varkappa\cdot\delta z}$

$$= f_{x,y,z} + \left|\begin{array}{l} \partial f_x \cdot \delta x \\ + \partial f_y \cdot \delta y \\ + \partial f_z \cdot \delta z \end{array}\right| \cdot \varkappa + \left|\begin{array}{l} \partial^2 f_x \cdot \delta x^2 \\ + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y \\ + \partial^2 f_y \cdot \delta y^2 \\ + 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \delta x \cdot \delta z \\ + 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \delta y \cdot \delta z \\ + \partial^2 f_z \cdot \delta z^2 \end{array}\right| \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdot$$

Anmerkung. Es hat aber diese letztere Umformung vorzüglich dann Werth, und sollte in diesem Falle immer angewandt werden, wenn die Zuwachse Δx, Δy, Δz, ꝛc. im Moment des Verschwindens betrachtet werden und doch noch von einander verschieden bleiben sollen. In diesem Falle nimmt man

$$\Delta x = \varkappa \cdot \delta x, \quad \Delta y = \varkappa \cdot \delta y, \quad \Delta z = \varkappa \cdot \delta z, \text{ ꝛc.}$$

und denkt sich $\varkappa$ allein im Moment des Verschwindens, dagegen δx, δy, δz, ꝛc. noch beliebig groß und so unbestimmt, wie solches die willkührlichen und von einander unabhängig gedachten Zuwachse Δx, Δy, Δz, ꝛc. ꝛc. erfordern. Und die Reihen, welche man für

$$f_{x+\Delta x, y+\Delta y} \quad \text{oder} \quad f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

erhält, sind nun schon nach Potenzen des, im Moment des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ geordnet, so daß jedes folgende Glied $Q \cdot \varkappa^{n+1}$ gegen das vorhergehende $P \cdot \varkappa^n$ im Moment des Verschwindens ist, in so ferne

$$P \cdot \varkappa^n + Q \cdot \varkappa^{n+1} = (P + Q \cdot \varkappa) \cdot \varkappa^n$$

ist, und $Q \cdot \varkappa$ gegen P im Moment des Verschwindens sich befindet.

Zweite Abtheilung.

Allgemeine Lehrsätze des Ableitens. Darauf gegründete allgemeine systematische Ableitungs-Methode für alle entwikkelt gegebene Funktionen.

---

§. 33. Erklärung.

Alle bis hieher betrachteten Funktionen, waren explizite oder unmittelbare Funktionen ihrer Veränderlichen, d. h. solche, welche ihre Veränderlichen wirklich, sichtbar oder unmittelbar enthalten; und alle bisher aufgestellten Zeichen beziehen sich auch in der Folge noch allemal durchaus nur auf solche unmittelbare oder explizite Funktionen.

Derselbe Ausdruck aber, welcher eine unmittelbare oder explizite Funktion von x, oder von y, oder von z, oder von

zweien, oder von allen dreien dieser letztern, oder von noch mehr Veränderlichen ist, kann aber zugleich auch eine **mittelbare** oder **implizite** Funktion von v, oder von v und u, oder von v, u und t, u. s. w. werden, wenn man nämlich in $f_{x,y,z,\text{rc.}}$, statt x, y, z, rc., (statt aller, statt einiger, oder statt nur eines einzigen derselben) wiederum Funktionen von v, oder von v und u, oder von v, u und t u. s. w. gesetzt sich denkt.

Es ist nicht füglich möglich und auch praktisch nicht nothwendig, die hier als möglich gedachten ungemein vielen einzelnen Fälle, durch gehörige, alle Umstände bequem versinnlichende Zeichen darzustellen. Daher mag hier nur ein ziemlich allgemeiner Fall näher betrachtet werden; nämlich der Fall, wo f eine unmittelbare (explizite) Funktion von x, y, z, rc. rc. ist, und wo nun für **alle** diejenigen der Veränderlichen x, y, z, rc., welche noch Funktionen von v, oder von v und u, oder von v und u und t, rc. sind, diese Funktionen selbst gesetzt gedacht werden. Die dadurch entstehende Funktion von v, oder von v und u, oder von v, u und t, u. s. w., soll dann allemal durch

$$f_{(v)} \quad \text{oder} \quad f_{(v),(u)} \quad \text{oder} \quad f_{(v),(u),(t)}, \quad \text{u. s. w.}$$

vorgestellt seyn, so daß die Klammern, in denen, v, u, t, eingeschlossen sich finden, andeuten, daß diese Funktion f schon nicht mehr als Funktion von x, y, z, rc. sondern bereits als Funktion von v, oder von v, u, oder von v, u, t, rc. gedacht wird; und zwar ist nicht die Funktion von v, oder von v, u, oder rc. gemeint, welche entstehen würde, wenn man in der Funktion $f_{x,y,z,\text{rc.}}$ bloß statt y allein, oder bloß statt z allein, oder bloß statt x und y allein, die durch x, y, rc. vorgestellten Funktionen von v, rc. setzen wollte; sondern es soll allemal diejenige Funktion von v, rc. verstanden werden, welche entsteht, wenn in $f_{x,y,z,\text{rc.}}$ statt **aller** der Veränderlichen x, y, z, rc., welche wiederum Funktionen von v, u, rc. sind, **zugleich**, diese neuen Funktionen von v, rc. gesetzt, gedacht werden.

Es bedeuten dann

$$\partial f_{(v)}, \quad \partial^2 f_{(v)}, \quad \partial^3 f_{(v)}, \quad \text{rc. rc.}, \quad \partial^a f_{(v)},$$

die Ableitungen nach allem v, was in $f_{x,y,z,\text{rc.}}$ mittelbar (implizit) vorkommt. Eben so bedeuten

$$\partial^{a,b} f_{(v),(u)}, \qquad \partial^{a,b,c} f_{(v),(u),(t)}, \text{ rc. rc.}$$

die Ableitungen nach allem v, und nach allem u, und nach allem t, was in $f_{x,y,z}$ sowohl, als auch in den Ausdrücken ihrer einzelnen Ableitungen (letztere wiederum nach allem v, u, t, rc. genommen) vorkommt; und dies soll selbst dann noch so genommen werden, wenn auch v, u, rc. zu gleicher Zeit explizit und implizit (unmittelbar und mittelbar) in dem gegebenen f, d. h. $f_{v,u,x,y,z,}$ oder rc. vorkommen sollten, welches letztere offenbar ebenfalls möglich ist, und in welchem Falle die Funktion selbst eine gemischte Funktion von v, u, rc. genannt werden kann.

Beispiele. Es sey der gegebene Ausdruck folgender

$$\frac{a \cdot Sin(x+y) - b \cdot log\, z + cx^m y^n z^p}{(a+bx+cy)(px+qz^2)},$$

und in ihm seyen b, c und z wiederum Funktionen von v, etwa

$$b = 3v^2, \quad c = 4v^5 \quad \text{und} \quad z = 1+4v;$$

so könnte man in diesem Ausdruck f, bloß statt b den Werth $3v^2$ setzen, und der neue dadurch entstehende Ausdruck

$$\frac{a \cdot Sin(x+y) - 3v^2 \cdot log\, z + cx^m y^n z^p}{(a+3v^2x+cy)(px+qz^2)}$$

würde das v schon explizit enthalten, und in so ferne schon eine (explizite) unmittelbare Funktion von v seyn, aber nicht diejenige, welche der unter $f_{(v)}$ zu verstehenden gleich wäre; denn letztere $f_{(v)}$ soll nur diejenige unmittelbare (explizite) Funktion von v vorstellen, welche aus dem gegebenen Ausdruck f wird, wenn statt b, c und z zugleich, ihre Werthe in v gesetzt worden, so daß also $f_{(v)}$ gleich ist dem Ausdruck

$$\frac{a \cdot Sin(x+y) - 3v^2 \cdot log(1+4v) + 4v^5 x^m y^n (1+4v)^p}{(a+3v^2x+4v^5y)[px+q(1+4v)^2]}.$$

Ist aber $f = 3x^2 + 4xy - 5y^2z^2 + 4xyz$ gegeben, und sind y und z wiederum Funktionen von x, etwa

$$y = a+bx \quad \text{und} \quad z = px^3$$

so bedeutet f_x den gegebenen Ausdruck f d. h. $3x^2+4xy-5y^2z^2+4xyz$, als unmittelbare Funktion von x angesehen, also y und z dabei als nach x konstant (von x unabhängig) gedacht, während $f_{(x)}$ den Ausdruck

$$3x^2+4x(a+bx)-5(a+bx)^2(px^3)^2+4x(a+bx)(px^3)$$

oder den Ausdruck

$$4ax+(4b+3)x^2-5a^2p^2x^6-10abp^2x^7-5b^2p^2x^8+4apx^4+4bpx^5$$

vorstellt. — Und es ist dahero

$$\partial f_x = 6x+4y+4yz,$$

dagegen

$$\partial f_{(x)} =$$
$$4a+(8b+6)x-30a^2p^2x^5-70abp^2x^6-40b^2p^2x^7+16apx^3+20bpx^4;$$

so daß man an diesem Beispiele versinnlicht sieht, wie sehr verschieden die durch ∂f_x und $\partial f_{(x)}$ bezeichneten Ausdrücke sind; auch wodurch sie sich von einander unterscheiden.

Anmerkung. Die Schwierigkeiten, welche der Anfänger in der vorhergehenden Bezeichnungsweise, so wie in der dadurch bezweckten Unterscheidung der Ausdrücke noch antreffen könnte, werden übrigens am sichersten gehoben, wenn wir noch einmal auf dasjenige aufmerksam machen, worauf sich in den vorhergehenden beiden Theilen dieses Systems alle Untersuchungen, dem Wesen nach, zurückgezogen haben; nämlich:

1) Die Ausdrücke sind Zusammensetzungs-Formen. Und wenn zwei verschiedene Zusammensetzungsformen (also zwei verschiedene Ausdrücke) einerlei Bedeutung haben, so entsteht eben das, was wir Gleichung nennen. Die zwei Seiten einer Gleichung (d. h. die zwei Ausdrücke zur Linken und zur Rechten des (=) Zeichens) sind daher in der Regel verschieden (d. h. sie sind verschiedene Formen der Zusammensetzung), aber einander gleich (d. h. sie haben eine und dieselbe Bedeutung). Und gerade nur diejenigen Gleichungen, deren beide Seiten verschiedene Ausdrücke (d. h. verschiedene Zusammensetzungs-Formen) sind, und welche man nur deshalb gleiche Ausdrücke nennt, weil sie einerlei Bedeutung haben, erfüllen ihren Zweck, d. h. lehren das Verhalten der Operationen zu einander kennen, wie z. B. die Gleichungen $(a-b)m = am-bm$, oder

$$\frac{a}{b}-c = \frac{a-bc}{b}, \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} = z+\frac{A-Bz}{B},$$

u. s. w. f.; während diejenigen Gleichungen ganz bedeutungslos sind, in denen die, einander gleichen Ausdrücke (Formen) nicht mehr verschieden sind, z. B. $A = A$, $0 = 0$, u. dgl.

2) Zwei gleiche Ausdrücke können für einander vollkommen gesetzt werden, sobald man Untersuchungen hat, in denen die Ausdrücke nur diejenigen ihrer Eigenschaften repräsentiren, nach welchen sie einander gleich sind. Dagegen können dieselben gleichen Ausdrücke nicht für einander gesetzt werden, sobald sie in den vorhabenden Untersuchungen gerade die Eigenschaften repräsentiren (z. B. die Form der Zusammensetzung), vermöge deren sie (wenn auch einander gleich) doch noch wesentlich von einander verschieden sind.

3) Ist nun z. B. f eine unmittelbare Funktion von x, y und z, während y und z selber wieder Funktionen von x sind, so ist

$$f = f_x = f_y = f_z = f_{x,y} = f_{x,y,z} = f_{(x)},$$

wenn unter $f_{(x)}$ der Ausdruck gedacht wird, welcher aus $f_{x,y,z}$ hervorgeht, wenn man statt y und statt z überall die Funktionen von x substituirt, welche unter y und z gedacht werden sollen. — Also ist namentlich auch

$$f_x = f_{(x)}.$$

Aber deswegen ist

$$f_{x+\Delta x} \quad \text{nicht} \quad = f_{(x+\Delta x)},$$

weil ersteres Zeichen $f_{x+\Delta x}$ bloß verlangt, daß in $f_{x,y,z}$ welches x, y und z enthält, bloß statt des explizit vorkommenden x, gesetzt werden soll $x + \Delta x$, während das andere $f_{(x+\Delta x)}$ auch noch erfordert, daß nicht bloß für jedes x, welches in dem gegebenen f unmittelbar (explizit) vorkommt, sondern auch für jedes x, welches in den statt y und statt z zu setzenden (oder bereits gesetzten) Ausdrücken y_x, z_x, vorkommt, $x + \Delta x$ gesetzt werde.

Wenn aber $f_{x+\Delta x}$ und $f_{(x+\Delta x)}$ einander nicht gleich (nicht identisch) sind, so sind auch die, nach ganzen Potenzen von Δx fortlaufenden, den Funktionen $f_{x+\Delta x}$ und $f_{(x+\Delta x)}$ gleichen Reihen, nicht identisch; daher auch die gleichnamigen Koeffizienten dieser Reihen nicht einander gleich, also auch nicht die Koeffizienten von h^1, wovon der eine durch ∂f_x der andere dagegen durch $\partial f_{(x)}$ bezeichnet wird; d. h. es ist ∂f_x nicht $= \partial f_{(x)}$.

4) Die hier eingeführte, diesen Begriffen entsprechende Bezeichnung, setzt also voraus, daß unter $f_{x,y,z}$ allemal der gegebene Ausdruck

selber, und nicht andere verstanden werden, die aus ihm hervorgehen, wenn Substitutionen vorgenommen werden, obgleich letztere ihm gleich sind; eben weil bei diesen Untersuchungen vorzüglich die Form der Zusammensetzungen berücksichtigt werden muß, welche auch in gleichen Ausdrücken noch allemal verschieden ist.

5) Ist aber in einzelnen Fällen nicht bloß

$$f_{(v)} = f_v,$$

sondern auch noch

$$f_{(v+\Delta v)} = f_{v+\Delta v},$$

so ist auch

$$\partial f_{(v)} = \partial f_v,$$

und in Bezug auf die Ableitungen, zwischen $f_{(v)}$ und f_v kein Unterschied mehr zu machen.

§. 34. Erster Hauptlehrsatz.

Ist y eine unmittelbare Funktion von x, und in so ferne auch durch y_x vorgestellt, und wird statt x wieder eine Funktion von v, die durch x_v ausgedrückt ist, gesetzt, so geht y_x als Funktion von x, in eine Funktion von v über, welche durch $y_{(v)}$ *) bezeichnet wird, so daß man hat

$$y_{(v)} = y_x.$$

Dann ist aber allemal

$$\text{I.}\quad \partial y_{(v)} = \partial y_x \cdot \partial x_v;\quad \text{oder}\quad \partial y = \partial y_x \cdot \partial x;$$

wenn man die bloßen ∂y, ∂x als Ableitungen nach allem v ansieht; d. h. die Ableitung von y (als eine mittelbare (implizite) Funktion von v angesehen) nach v wird allemal gefunden, wenn man die Ableitung von y (als eine unmittelbare Funktion von x angesehen) nach x nimmt, und solche mit der Ableitung von x nach v, wieder multiplizirt.

---

*) Hier ist sogleich der Fall, daß $y_{(v)}$ und y_v sich weder dem Werthe noch der Form nach, von einander unterscheiden; daher kann hier statt $\partial y_{(v)}$ auch ∂y_v geschrieben werden.

Beispiel 1. Es sey

$$1)\ y = a^x \quad \text{und} \quad 2)\ x = bv, \quad \text{also} \quad 3)\ y = a^{bv},$$

so ist $\partial y_x = \partial(a^x)_x = a^x \cdot log\, a,$

$\partial x_v = \partial(bv)_v = b;$

also $\partial y_{(v)}$ d. h. $\partial(a^{bv})_v = b \cdot a^{bv} \cdot log\, a.$

Beispiel 2. Ist

$$1)\ y = Ax^m \quad \text{und} \quad 2)\ x = Bv^n,$$

so ist $3)\ y_{(v)} = A(Bv^n)^m,$ d. h. $4)\ y_{(v)} = AB^m \cdot v^{mn}.$

Nun ist $5)\ \partial y_x = mA \cdot x^{m-1};$ $6)\ \partial x_v = nB \cdot v^{n-1};$

also nach dem Lehrsatze selbst

$$7)\ \partial y_{(v)} \text{ d. h. } \partial(AB^m \cdot v^{mn})_v = mnABx^{m-1}v^{n-1}.$$

Nun ist aber aus (2.) $x^{m-1} = (Bv^n)^{m-1} = B^{m-1} \cdot v^{mn-n};$ folglich, wenn man diesen Werth in (7.) substituirt:

$$8)\ \partial y_{(v)} = mnAB^m \cdot v^{mn-1};$$

und gerade dasselbe hätte man dasmal auch direkt erhalten, wenn man von

$$y_{(v)} = AB^m \cdot v^{mn}$$

sogleich direkt die Ableitung nach v gesucht hätte.

Beweis. Es ergibt sich aber die Richtigkeit des Lehrsatzes augenblicklich, wenn man nach (§. 8.)

$$1)\ \partial y_{(v)} = \frac{y_{(v+h)} - y_{(v)}}{h} \text{ für } h = 0$$

berechnet, und dabei berücksichtigt, daß wenn $v+h$ statt v gesetzt wird, dann x in x_{v+h} übergeht, d. h. in $x+\Delta x$, während nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$2)\ x_{v+h} = x_v + \partial x_v \cdot h + \partial^2 x_v \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots,$$

also $3)\ \Delta x = \partial x_v \cdot h + \partial^2 x_v \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$ ist;

und daß dann nicht bloß

$4)\ y_v = y_x,$ sondern auch $5)\ y_{v+h} = y_{x+\Delta x}$ wird,

während wiederum nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$6)\quad y_{x+\Delta x} = y_x + \partial y_x \cdot \Delta x + \partial^2 y_x \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots$$

$$= y_x + \Delta x \cdot \left(\partial y_x + \partial^2 y_x \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \cdots\right)$$

seyn muß. — Man hat dann

$$7)\quad \partial y_v = \frac{y_{v+h} - y_v}{h} = \frac{y_{x+\Delta x} - y_x}{h}$$

$$= \frac{\Delta x}{h} \cdot \left(\partial y_x + \partial^2 y \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \partial^3 y \cdot \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \cdots\right),$$

wenn man nur zur Rechten, nachdem durch h wegdividirt ist, 0 statt h setzt. Nun ist aber $\frac{\Delta x}{h}$ nach (N. 3.), sobald 0 statt h gesetzt wird, nichts anders als ∂x_v, während Δx selbst, für $h = 0$, in 0 übergeht; also erhält man aus (7.)

$$8)\quad \partial y_v = \partial x_v \cdot \partial y_x = \partial y_x \cdot \partial x_v;$$

welches zu erweisen war. *)

Anmerkung 1. Setzt man in der Formel des Lehrsatzes

$$1)\quad \partial y_{(v)} = \partial y_x \cdot \partial x_v,$$

v statt x, so daß $x_v = x_x = x$ wird, so erhält man

$$2)\quad \partial y_{(x)} = \partial y_x \cdot \partial x_x,$$

wo aber $y_{(x)}$ von y_x, und auch $\partial y_{(x)}$ von ∂y_x nicht verschieden ist, weil $y_{(x)}$ jetzt dasjenige bedeutet, was aus y_x wird, wenn statt x jetzt x_x d. h. selber wieder nichts anders als x gesetzt wird.

Dieses Resultat (2.) stimmt aber genau mit der Formel (§. 6. I. 1.) zusammen, nach welcher $\partial x_x = 1$ gefunden worden ist; so wie umgekehrt, aus obiger Formel (2.), durch ∂y_x wegdividirend, wiederum $\partial x_x = 1$ gefunden wird.

Anmerkung 2. Im Sinne der Differenzialrechnung würde, wenn man $v + dv$ statt v setzte, dadurch x in $x + dx$, und dadurch wieder y in $y + dy$ übergehen; und es wäre dann eine bereits in der gemeinen Buchstabenrechnung begründete Wahrheit, daß

---

*) Auch hätte man in dem ganzen Beweise durchaus Δv statt h setzen können.

$$dy = dy \quad \text{oder} \quad dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx,$$

also auch, wenn man links und rechts durch dv wegdividirt,

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv}$$

d. h. $\partial y_{(v)} = \partial y_x \cdot \partial x_v$ ist, in so ferne nach (§. 19. N. 2.)

$$\partial y_{(v)} = \frac{dy}{dv}, \quad \partial y_x = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \partial x_v = \frac{dx}{dv}$$

genommen werden kann.

Ueberlegt man die Ursache dieses Zusammentreffens genauer, so findet man, daß wenn dx nur das erste Glied des, durch dv veranlaßten, und nach der Taylor'schen Reihe zu bestimmenden Zuwachses von x vorstellt (in welchem Falle allein $\frac{dx}{dv} = \partial x_v$ ganz genau ist) man, in y_x, $x+dx$ statt x setzend, bereits aus x_{v+dv} alle die mit den höhern Potenzen von dv behaftete Glieder weggelassen habe, welche auch als solche in y_{x+dx} d. h. in y_{v+dv} erschienen seyn würden. Und indem man nun statt y_{x+dx} wiederum bloß $y+dy$ nimmt, dy in dem Sinne $\partial x_v \cdot dx$ genommen, so läßt man noch alle die Glieder weg, welche höhere Potenzen von dx, also auch höhere Potenzen von dv enthalten; folglich liegt schon in dem, (§. 19.) bestimmten Doppelsinn des Differenzials, und dadurch daß man sich erlaubt beide Deutungen nach Belieben mit einander zu verwechseln, voraus angenommen, was ohne diese Annahme (wie in unserem (§. 34.) geschehen ist) noch besonders nachgewiesen werden muß.

Anmerkung 3. Strenger und ganz im Sinne der Ableitungsrechnung ist dagegen folgendes:

Es ist, wenn man Δv statt h setzt, und wenn man unter Δx den Zuwachs von x sich denkt, welchen x als x_v dadurch erleidet, daß $v+\Delta v$ statt v gesetzt wird, und wenn Δy wiederum den Zuwachs vorstellt, welchen y als y_x dadurch erhält, daß man $x+\Delta x$ statt x setzt (also auch den Zuwachs, welchen y als y_v erhält, wenn $v+\Delta v$ statt v gesetzt wird), so ist offenbar nach den Elementen der Buchstabenrechnung

$$1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta v}$$

für jedes Δv, also auch für $\Delta v = 0$. — Aber für $\Delta v = 0$ geht (nach §. 16. N. 4.) $\frac{\Delta x}{\Delta v}$ in ∂x_v, und weil auch zu gleicher Zeit $\Delta x = 0$

ist, auch noch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in ∂y_x, so wie $\frac{\Delta y}{\Delta v}$ in ∂y_v über, so daß nun die Gleichung (1.) keine andere als diese

$$2)\quad \partial y_v = \partial y_x \cdot \partial x_v^1$$

ist, also die Gleichung des obigen Lehrsatzes. — Dies ist der Beweis, welcher in der „Methode der Grenzen" gegeben wird, nur daß dort die Zeichen $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dv}$, statt der hiesigen ∂y_v, ∂y_x, ∂x_v stehen.

§. 35. Zweiter Hauptlehrsatz.

Ist f eine unmittelbare Funktion von x und von y und in so ferne durch $f_{x,y}$ bezeichnet, so ist f auch eine bloße Funktion von x allein, und von y allein, so daß dasselbe f auch durch f_x, und auch durch f_y bezeichnet werden kann. Sind nun x und y selber wieder Funktionen von v, und denkt man sich letztere x_v und y_v statt x und y in f substituirt, so wird f nun auch eine (mittelbare) Funktion von v, welche durch $f_{(v)}$ vorgestellt seyn kann. — Dann aber hat man allemal

$$\text{II.}\quad \partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v;$$

oder

$$\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y,$$

wenn die bloßen ∂f, ∂x, ∂y, Ableitungen nach allem v genommen, bedeuten; d. h. die Ableitung von f nach allem v wird gefunden, wenn man nach (§. 34.) die Ableitung nimmt von derjenigen Funktion von v, welche $f_{x,y}$ liefert, sobald bloß statt x allein x_v gesetzt wird, dann auch die Ableitung nimmt von dem, was $f_{x,y}$ liefert, wenn bloß y_v statt y gesetzt wird, und beide Resultate addirt; oder mit andern Worten: die Ableitung von $f_{(v)}$ findet man, wenn man die Ableitung nimmt von demselben $f_{(v)}$ unter der Voraussetzung daß y oder y_v konstant ist (nach v), dann die Ableitung nimmt von demselben $f_{(v)}$ unter der Voraussetzung, daß x oder x_v (nach v) konstant ist, und beide Resultate addirt.

Beweis. Man wird ihn in dem Beweise des (§. 38.) enthalten finden.

§. 36. Zusatz.

I. Setzt man

$$f = Ax \pm By = f_{x,y};$$

so ist $f_{(v)} = Ax_v \pm By_v$,

und nach (§. 6.) $\partial f_x = A, \quad \partial f_y = \pm B;$

also, nach dem Lehrsatze:

$$\partial f_{(v)} = A \cdot \partial x_v \pm B \cdot \partial y_v$$

d. h.

$$1) \quad \partial(Ax_v \pm By_v)_v = A \cdot \partial x_v \pm B \cdot \partial y_v;$$

und dies ist wiederum der Lehrsatz des (§. 9.).

II. Ist $f = x \cdot y$, also $f_{(v)} = x_v \cdot y_v$,

so hat man nach (§. 6.):

$$\partial f_x = y \text{ und } \partial f_y = x;$$

also, nach dem Lehrsatze:

$$\partial f_{(v)} = y \cdot \partial x_v + x \cdot \partial y_v$$

d. h.

$$2) \quad \partial(x_v \cdot y_v)_v = y \cdot \partial x_v + x \cdot \partial y_v;$$

d. h. die Ableitung eines Produkts xy nach v wird gefunden, wenn man von jedem Faktor einzeln die Ableitung nimmt, den andern Faktor jedesmal als solchen unverändert läßt, und zuletzt die Resultate addirt.

III. Ist $f = \frac{x}{y}$, also $f_{(v)} = \frac{x_v}{y_v}$,

so ist nach (§. 6.):

$$\partial f_x = \frac{1}{y}, \qquad \partial f_y = -\frac{x}{y^2}; \text{*)}$$

mithin, nach dem Lehrsatze:

$$\partial f_{(v)} = \frac{1}{y} \cdot \partial x_v - \frac{x}{y^2} \cdot \partial y_v$$

---

*) Weil $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ ist.

d. h.

$$3)\quad \partial\left(\frac{x}{y}\right)_v = \frac{y\cdot\partial x_v - x\cdot\partial y_v}{y^2},\ ^{*)}$$

d. h. die Ableitung eines Quotienten $\frac{x}{y}$ nach v wird gefunden, wenn man den Nenner y multiplizirt mit der Ableitung ∂x_v des Zählers x, dann den Zähler x multiplizirt mit der Ableitung ∂y_v des Nenners y, letzteres von ersterem subtrahirt, und zuletzt das Ganze durch das Quadrat y^2 des Nenners dividirt.

IV. Ist $f = x^y$, so ist nach (§. 6.)

$$\partial f_x = y\cdot x^{y-1},\qquad \partial f_y = x^y\cdot log\, x;$$

folglich, nach dem Lehrsatze:

$$\partial f_{(v)} = y x^{y-1}\cdot\partial x_v + x^y\cdot log\, x\cdot\partial y_v,$$

d. h.

$$4)\quad \partial(x^y)_v = y\cdot x^{y-1}\cdot\partial x_v + x^y\cdot log\, x\cdot\partial y_v.$$

Anmerkung. Wenn aber der Lehrsatz (§. 35.) lehrt, wie die Ableitung einer aus zweien andern Funktionen von v beliebig zusammengesetzten Funktion von v, in die Ableitungen dieser andern einfachern Funktionen ausgedrückt werden könne, und daher die ganze systematische Kunst des Ableitens in sich schließt (man sehe die Schluß-Anmerkung pag. 96.), so sind die (§. 36.) daraus hervorgeholten speziellen Formeln, wenn auch nicht so allgemein, aber dagegen praktisch bequemer, weil in der That jede Funktion von v, wenn sie nicht schon zu den einfachsten gehört, aus zweien andern x_v und y_v, durch Addition, und Subtraktion, Multiplikation, Division oder Potenzirung zusammengesetzt seyn wird. Denn selbst der Fall kann als bereits in dem Gegenwärtigen enthalten angesehen werden, in welchem einer der

---

*) Ist in $\frac{x}{y}$, der Zähler x nach v konstant (von v unabhängig), so ist $\partial x_v = 0$, und die Formel (3.) geht für diesen Fall über in $\partial\left(\frac{x}{y}\right)_v = -\frac{x\cdot\partial y_v}{y^2}$; welches man auch erhält, wenn man $\frac{x}{y}$ in $x\cdot y^{-1}$ verwandelt und dann (§. 6. I. nebst §. 34. 1.) anwendet.

beiden Ausdrücke x oder y nach v konstant (von v unabhängig) ist, so daß seine Ableitung nach v Null wird, weil dieses gerade der Fall des (§. 34. I.) ist, und in welchem Falle dieser letztere Satz aus dem (§. 35. II.) auf's neue hervorgeht, wie augenblicklich in die Augen fällt.

§. 37. Zusatz.

Ist alles wie im (§. 33.), aber $v = x$, so ist $x_v = x_x$ also $\partial x_v = \partial x_x = 1$ [nämlich $= \frac{(x+h)-x}{h}$ für $h = 0$ nach (§. 8.); (vgl. auch Anmerkung 1. zu §. 34.)]. — Es ist also dann f eine Funktion von x und y, und y noch eine Funktion von x, und die Formel (II. des §. 35.) verwandelt sich dann in

$$\text{II. 1.} \quad \partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x$$

oder

$$\partial f = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y,$$

wenn ∂f, ∂y nach allem x genommen gedacht werden.

§. 38. Dritter Hauptlehrsatz.

Ist f eine unmittelbare Funktion von x, y und z, und sind letztere wieder Funktionen von v, so ist f eine mittelbare Funktion von v; und dann ist allemal

$$\text{III.} \quad \partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v + \partial f_z \cdot \partial z_v$$

oder

$$\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z;$$

wenn die bloßen ∂f, ∂x, ∂y, ∂z, als Ableitungen nach allem v genommen, angesehen werden; d. h. die Ableitung von $f_{(v)}$ nach v wird gefunden, wenn man nach (§. 34. I.) die Ableitungen nimmt von $f_{(v)}$, in so ferne das v nur in einem der 3 Veränderlichen x, y oder z enthalten gedacht, die beiden andern aber als nach v konstant (von v unabhängig) angesehen werden, und wenn man zuletzt diese 3 speziellen Resultate addirt.

Beweis. Denn so wie $v + \Delta v$ statt v gesetzt wird, hat man

$$x_{v+\Delta v} = x + \Delta x, \quad y_{v+\Delta v} = y + \Delta y, \quad z_{v+\Delta v} = z + \Delta z,$$

während nach dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 12. oder §. 16.):

$$1)\quad \Delta x = \partial x_v \cdot \Delta v + \partial^2 x_v \cdot \frac{\Delta v^2}{2!} + \cdots$$

$$2)\quad \Delta y = \partial y_v \cdot \Delta v + \partial^2 y_v \cdot \frac{\Delta v^2}{2!} + \cdots$$

$$3)\quad \Delta z = \partial z_v \cdot \Delta v + \partial^2 z_v \cdot \frac{\Delta v^2}{2!} + \cdots$$

seyn wird, so daß die zweiten und höhern Potenzen von Δx, Δy, Δz, und überhaupt alle Glieder mit zweiten und höhern Dimensionen von Δx, Δy, Δz, bereits lauter zweite und höhere Potenzen von Δv enthalten.

Nun ist aber nach (§. 8.):

$$\partial f_{(v)} = \frac{f_{(v+\Delta v)} - f_{(v)}}{\Delta v} \quad \text{für } \Delta v = 0,$$

d. h.

$$\partial f_{(v)} = \frac{f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z} - f_{x,y,z}}{\Delta v} \quad \text{für } \Delta v = 0.$$

Dagegen ist nach (§. 30.):

$$f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z} = f_{x,y,z} + \left|\begin{array}{l} \partial f_x \cdot \Delta x \\ + \partial f_y \cdot \Delta y \\ + \partial f_z \cdot \Delta z \end{array}\right| + \left\{\begin{array}{c} \text{alle Glieder mit} \\ \text{höhern Dimensionen} \\ \text{von } \Delta x, \Delta y, \Delta z. \end{array}\right\}$$

Folglich ist:

$$\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta v} + \partial f_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta v} + \partial f_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta v} + \left\{\begin{array}{c} \text{die Glieder der} \\ \text{höhern Dimensionen} \\ \text{von } \Delta x, \Delta y, \Delta z. \end{array}\right\}$$

wenn nach der Division mit Δv, 0 statt Δv gesetzt wird. In so ferne aber dann $\frac{\Delta x}{\Delta v}$, $\frac{\Delta y}{\Delta v}$, $\frac{\Delta z}{\Delta v}$ in ∂x_v, ∂y_v, ∂z_v übergehen, alle folgenden Glieder aber Null werden, so ergibt sich zuletzt

$$\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v + \partial f_z \cdot \partial z_v,$$

welches zu erweisen war.

Beispiele. Ist z. E. $f = x \cdot y \cdot z$, so ist

$$\partial f_x = yz, \quad \partial f_y = xz, \quad \partial f_z = xy,$$

also nach dem Lehrsatze

$$\partial (xyz)_v = yz \cdot \partial x_v + xz \cdot \partial y_v + xy \cdot \partial z_v.$$

Und ist $f = \frac{xy}{z}$, so ist

$$\partial f_x = \frac{y}{z}, \quad \partial f_y = \frac{x}{z}, \quad \partial f_z = -\frac{xy}{z^2},$$

also nach dem Lehrsatze:

$$\partial\left(\frac{xy}{z}\right)_v = \frac{y}{z}\cdot\partial x_v + \frac{x}{z}\cdot\partial y_v - \frac{xy}{z^2}\cdot\partial z_v$$
$$= \frac{zy\cdot\partial x_v + zx\cdot\partial y_v - xy\cdot\partial z_v}{z^2}.$$

§. 39. Zusatz.

Ist $v = x$, also $\partial x_v = \partial x_x = 1$, so folgt hieraus, daß, wenn f eine unmittelbare Funktion von x, y und z ist, y und z aber wieder Funktionen von x sind, so daß f selber eine gemischte Funktion von x wird, durch $f_{(x)}$ bezeichnet, dann seyn muß

III. 1. $\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x + \partial f_z\cdot\partial z_x$

oder $\partial f = \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y + \partial f_z\cdot\partial z;$

wenn die bloßen ∂f, ∂y, ∂z als Ableitungen nach allem x angesehen werden.

§. 40. Zusatz.

Auf dieselbe Weise hat man, wenn f eine beliebige unmittelbare Funktion von x, y, z, u ist, x, y, z, u aber wieder Funktionen von v sind,

IV. $\partial f_{(v)} = \partial f_x\cdot\partial x_v + \partial f_y\cdot\partial y_v + \partial f_z\cdot\partial z_v + \partial f_u\cdot\partial u_v$

oder $\partial f = \partial f_x\cdot\partial x + \partial f_y\cdot\partial y + \partial f_z\cdot\partial z + \partial f_u\cdot\partial u;$

wenn die bloßen ∂f, ∂x, ∂y, ∂z, ∂u, als Ableitungen nach allem v gedacht werden.

Und wenn $v = x$, also y, z, u, Funktionen von x sind, weil dann $\partial x_v = \partial x_x = 1$ ist:

IV. 1. $\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x + \partial f_z\cdot\partial z_x + \partial f_u\cdot\partial u_x;$

oder $\partial f = \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y + \partial f_z\cdot\partial z + \partial f_u\cdot\partial u,$

wenn die bloßen ∂f, ∂y, ∂z, ∂u, als Ableitungen nach allem x angesehen werden.

Und allgemein ergibt sich der Satz:

Die Ableitung einer mittelbaren Funktion f von v, ist allemal gleich der Summe der einzelnen Ablei-

tungen, sowohl nach dem v welches vielleicht explizit (unmittelbar) in f vorkommt, als auch nach dem v, was in jedem einzelnen der von v abhängigen Buchstaben y, z, u, ꝛc. ꝛc. vorkommt, und welche letzteren nach dem Hauptlehrsatze (§. 34. I.) gefunden werden müssen.

Beispiel 1. Ist $$f = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot w,$$
so ist $$f_{(v)} = x_v \cdot y_v \cdot z_v \cdot u_v \cdot w_v$$
und
$$\partial f_{(v)} = yzuw \cdot \partial x_v + xzuw \cdot \partial y_v + xyuw \cdot \partial z_v + xyzw \cdot \partial u_v + xyzu \cdot \partial w_v.$$

Beispiel 2. Und ist $f = \frac{x \cdot y}{z \cdot u \cdot w}$, also $f_{(v)} = \frac{x_v \cdot y_v}{z_v \cdot u_v \cdot w_v}$ so ist $\partial f_{(v)} =$
$$\frac{yzuw \cdot \partial x_v + xzuw \cdot \partial y_v - xyuw \cdot \partial z_v - xyzw \cdot \partial u_v - xyzu \cdot \partial w_v}{z^2 \cdot u^2 \cdot w^2}.$$

Beispiel 3. Ist $f = \frac{x + y \cdot z}{u - w}$, also $f_{(v)} = \frac{x_v + y_v \cdot z_v}{u_v - w_v}$,

so hat man $\partial f_x = \frac{1}{u-w}$, $\partial f_y = \frac{z}{u-w}$, $\partial f_z = \frac{y}{u-w}$,
$\partial f_u = -\frac{x+yz}{(u-w)^2}$ *), $\partial f_w = \frac{x+yz}{(u-w)^2}$, also
$$\partial f_{(v)} = \frac{\partial x_v}{u-w} + \frac{z \cdot \partial y_v}{u-w} + \frac{y \cdot \partial z_v}{u-w} - \frac{x+yz}{(u-w)^2} \cdot \partial u_v + \frac{x+yz}{(u-w)^2} \cdot \partial w_v.$$

---

*) Weil nämlich in ∂f_u, die x, y, z, w als konstant angesehen werden müssen, und weil
$$f = (x+yz) \cdot (u-w)^{-1} = (x+yz) \cdot t^{-1} = f_{(u)}$$
geschrieben werden kann, wenn t wiederum die Funktion $u-w$ von u vorstellt; und weil nach (§. 34. I.)
$$\partial f_{(u)} = \partial f_t \cdot \partial t_u = -(x+yz) \cdot t^{-2} \cdot \partial t_u$$
ist, während $\partial t_u = 1$ gefunden wird; und während $\partial f_{(u)}$ das gesuchte ∂f_u ist.

§. 41. Aufgabe.

Von jeder entwickelt gegebenen Funktion φ von x, die Ableitung zu finden nach v, unter der Voraussetzung, daß x selber wieder eine Funktion von v ist, zugleich mit Angabe aller praktischen Bequemlichkeiten.

Auflösung.

A. Man schreibe sich hin die Sätze der (§. 34. I. §. 35. II. §. 38. III. §. 40.), nämlich

I. $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x$,

wenn f eine bloße Funktion von x ist;

II. $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y$,

wenn f eine Funktion von x und y ist;

III. $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z$,

wenn f eine Funktion von x, y und z ist;

IV. $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z + \partial f_u \cdot \partial u$,

wenn f eine Funktion von x, y, z und u ist; u. s. w. f.; wo durchaus x, y, z, u rc. als Funktionen von v angesehen werden, und wo die bloßen ∂, bei denen nicht ausdrücklich steht, nach welchem Veränderlichen sie genommen sind, allemal auf alles v sich beziehen.

B. Für die praktische Bequemlichkeit bemerke man sich die in II. III. rc. rc. enthaltenen speziellen Fälle, nämlich, wenn A, B, C, rc. konstant, x, y, z, rc. aber Funktionen von v sind:

1) $\partial(Ax + By + Cz + \cdots) = A \cdot \partial x + B \cdot \partial y + C \cdot \partial z + \cdots$;

2) $\partial(A + By) = \partial(By) = B \cdot \partial y$;

3) $\partial(xy) = y \cdot \partial x + x \cdot \partial y$;

4) $\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial x}{y} - \frac{x \cdot \partial y}{y^2} = \frac{y \cdot \partial x - x \cdot \partial y}{y^2}$;

5) $\partial(x^y) = y \cdot x^{y-1} \cdot \partial x + x^y \cdot log\, x \cdot \partial y$;

6) $\partial(x \cdot y \cdot z) = yz \cdot \partial x + xz \cdot \partial y + xy \cdot \partial z$;

7) $\partial(xyzu) = yzu \cdot \partial x + xzu \cdot \partial y + xyu \cdot \partial z + xyz \cdot \partial u$;

8) $\partial\left(\frac{xyz\cdots}{wts\cdots}\right) = \frac{yz\cdots}{wts\cdots}\cdot\partial x + \frac{xz\cdots}{wts\cdots}\cdot\partial y + \frac{xy\cdots}{wts\cdots}\cdot\partial z + \cdots$

$$- \frac{xyzts\cdots}{w^2t^2s^2\cdots}\cdot\partial w - \frac{xyzws\cdots}{w^2t^2s^2\cdots}\cdot\partial t - \frac{xyzwt\cdots}{w^2t^2s^2\cdots}\cdot\partial s - \cdots;$$

wo wiederum die ∂ auf alles v sich beziehen (d. h. Ableitungen nach allem v bedeuten) während x, y, z, s, t, w, u, ꝛc., (nicht aber A, B, C, ꝛc.) als Veränderliche, und zwar als Funktionen von v angesehen worden sind.

C. Man schreibe sich auch noch hin die Ableitungen der einfachsten Funktionen von x, wie solche (§. 6.) gefunden sind und dem (§. 34. I. oder A. I.) zufolge aussehen, wenn x wiederum eine Funktion von v ist, und die Ableitungen nach v verlangt werden; nämlich,

1) $\partial(Bx^m) = mBx^{m-1}\cdot\partial x;$

2) $\partial(a^x) = a^x\cdot log\, a\cdot\partial x;$

3) $\partial(log\, x) = \frac{\partial x}{x};$

wo, wie immer der natürliche Logarithme, für die Basis

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

gemeint ist, und wo die bloßen ∂ sich auf alles v beziehen. — Endlich noch

4) $\partial(x)_x = 1 = \partial x_x$.*)

D. Für die praktische Bequemlichkeit bemerke man auch noch die in den vorhergehenden (B. 1.—3.) enthaltenen speziellen Fälle, nämlich:

---

*) Diese letztere Formel (4.) ist nothwendig, wenn die Ableitungen nach v dadurch in Ableitungen nach x verwandelt werden sollen, daß $v = x$ selbst gedacht wird, in so ferne dann $\partial x_v = \partial x_x = 1$ wird, und die hiesigen Formeln (1.—3.) sogleich wieder die ursprünglichen Formeln des (§. 6.) werden.

1) $\partial(e^x) = e^x \cdot \partial x$;

2) $\partial\left(\frac{A}{x}\right) = \partial(Ax^{-1}) = -\frac{A \cdot \partial x}{x^2}$;

3) $\partial\left(\frac{A}{x^n}\right) = \partial(A \cdot x^{-n}) = -\frac{nA \cdot \partial x}{x^{n+1}}$;

4) $\partial\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \partial\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \cdot \partial x = \frac{m\sqrt[n]{(x^m)} \cdot \partial x}{nx}$

$$= \frac{m \cdot \partial x}{n\sqrt[n]{(x^{n-m})}};$$

also

5) $\partial(\sqrt{x}) = \partial(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial x = \frac{\partial x}{2\sqrt{x}}$;

6) $\partial(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \partial x = \frac{(\sqrt[3]{x}) \cdot \partial x}{3x} = \frac{\partial x}{3\sqrt[3]{(x^2)}}$;

7) $\partial(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \cdot \partial x = \frac{2 \cdot \partial x}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{(x^2)} \cdot \partial x}{3x}$;

u. s. w. f.

wo überall die ∂ nach **allem** v genommen gedacht werden, dagegegen sogleich in Ableitungen nach allem x übergehen, so oft $v = x$ gedacht, also $\partial x = 1$ gesetzt wird.

E. Die gegebene Funktion φ ist nun, wenn nicht eine der in (C) stehenden einfachen Funktionen, doch auf jeden Fall aus **zweien** andern Ausdrücken y und z zusammengesetzt, die entweder 1) wieder alle beide Funktionen von x sind, oder 2) von denen doch der eine z. B. y eine Funktion von x wieder ist, der andere z dagegen nach x konstant.

Im Falle (1.) wird die Formel (A. II.), im Falle (2.) dagegen die Formel (A. I.) sogleich $\partial\varphi$ in ∂y und ∂z, oder bloß in ∂y geben (alle Ableitungen nach allem v gedacht).

Diese Funktion y, oder diese Funktionen y und z (von x), sind nun wieder aus zweien Funktionen w und u (von x), oder

auch aus einer derselben und einem von x (und v) unabhängigen (nach x und v konstanten) Ausdruck zusammengesetzt; folglich sind nach denselben Formeln (A. I. II.) wiederum ∂y und ∂z in ∂w und ∂u auszudrücken.

Fährt man aber so fort, so werden nach und nach die Ableitungen ∂w und ∂u, und dann auch ∂y und ∂z, folglich zuletzt auch $\partial \varphi$, in die Ableitungen der einfachsten Funktionen ausgedrückt, zu denen man zuletzt doch gelangen muß; welche letzteren Ableitungen in (C. und D.) ein für allemal entwickelt stehen.

F. Wir wollen solches nun durch eine Reihe von Beispielen erörtern und einüben.

Beispiel 1. Es sey*) $\varphi = (ax + b)^m$, so ist φ zusammengesetzt aus $ax + b, = y$ und dem (nach x konstant gedachten) m, folglich hat man

$$\partial \varphi = m(ax + b)^{m-1} \cdot \partial(ax + b);$$

aber

$$\partial(ax + b) = a \cdot \partial x;$$

folglich

$$\partial \varphi = ma(ax + b)^{m-1} \cdot \partial x.$$

Beispiel 2. Wäre $\varphi = (4x^3 - 7x)^9$, so wäre φ zusammengesetzt aus $4x^3 - 7x, = y$ und 9; folglich

$$\partial \varphi = 9(4x^3 - 7x)^8 \cdot \partial(4x^3 - 7x).$$

Nun ist aber wieder

$$\partial(4x^3 - 7x) = \partial(4x^3) - \partial(7x);$$

und $\partial(4x^3) = 12x^2 \cdot \partial x;$ $\partial(7x) = 7 \cdot \partial x;$

folglich

$$\partial \varphi = 9(4x^3 - 7x)^8 \cdot (12x^2 - 7) \cdot \partial x.$$

---

*) Um in der Folge nicht immer mit vielen Worten angeben zu müssen, welche der Buchstaben eines Ausdrucks veränderlich, welche aber als konstant angesehen werden sollen, so mag hier vorläufig angenommen werden, daß die erstern Buchstaben im Alphabet allemal als nicht veränderlich (als konstant) angesehen werden sollen, die letztern dagegen x, y, z, u, ꝛc. als veränderlich; so lange nämlich nicht etwas anders festgesetzt wird.

Beispiel 3. Es sey $\varphi = \sqrt{x^2 - a^2}$, so ist φ zusammengesetzt aus $x^2 - a^2$, $= y$ und $\frac{1}{2}$ durch Potenzirung, nämlich $\varphi = (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, also

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{2}(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial(x^2 - a^2);$$

aber
$$\partial(x^2 - a^2) = 2x \cdot \partial x;$$

folglich

$$\partial\varphi = \frac{x \cdot \partial x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Beispiel 4. Es sey $\varphi = \frac{x^3 - 1}{x^4 - 7x^2}$, so ist φ zusammengesetzt aus $x^3 - 1$, $= y$ und $x^4 - 7x^2$, $= z$, so daß $\varphi = \frac{y}{z}$ ist; also hat man nach (A. II.) oder bequemer nach (B. 4.)

$$\partial\varphi = \frac{z \cdot \partial y - y \cdot \partial z}{z^2};$$

aber $\partial y = 3x^2 \cdot \partial x$; $\partial z = (4x^3 - 14x) \cdot \partial x$;
folglich

$$\partial\varphi = \frac{3(x^4 - 7x^2)x^2 \cdot \partial x - (x^3 - 1)(4x^3 - 14x) \cdot \partial x}{(x^4 - 7x^2)^2},$$

d. h.

$$\partial\varphi = \frac{-x^6 - 7x^4 + 4x^3 - 14x}{(x^4 - 7x^2)^2} \cdot \partial x.$$

Beispiel 5. Ist $\varphi = \sqrt[3]{\frac{ax^2 - b}{x^5}} = \left(\frac{ax^2 - b}{x^5}\right)^{\frac{1}{3}}$,

so ist φ zusammengesetzt, aus $\left(\frac{ax^2 - b}{x^5}\right)$, $= y$ und aus $\frac{1}{3}$, d. h. $\varphi = y^{\frac{1}{3}}$; also

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot \partial y.$$

Aber y ist selbst wieder zusammengesetzt aus $ax^2 - b$, $= w$ und x^5, $= u$; folglich

$$\partial y = \partial\frac{w}{u} = \frac{u \cdot \partial w - w \cdot \partial u}{u^2},$$

während $\partial w = 2ax \cdot \partial x$ und $\partial u = 5x^4 \cdot \partial x$ ist.

Also hat man

$$\partial y = \frac{2ax^6 - 5x^4(ax^2 - b)}{x^{10}} \cdot \partial x = \frac{-3ax^2 + 5b}{x^6} \cdot \partial x;$$

mithin

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{3}\left(\frac{ax^2-b}{x^5}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{-3ax^2+5b}{x^6} \cdot \partial x$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{x^5}{ax^2-b}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{-3ax^2+5b}{x^6} \cdot \partial x$$

d. h.

$$\partial\varphi = \frac{(-3ax^2+5b)\sqrt[3]{x}}{3x^3\sqrt[3]{(ax^2-b)^2}} \cdot \partial x.$$

Beispiel 6. Ist $\varphi = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$, so ist

$$\partial\varphi = b \cdot \partial\sqrt{x} - \partial(cx^{-1}) = b \cdot \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} + cx^{-2} \cdot \partial x;$$

d. h.

$$\partial\varphi = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}\right) \cdot \partial x.$$

Beispiel 7. Ist $\varphi = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} - cx$, so ist

$$\partial\varphi = a \cdot \partial(x^{-\frac{1}{2}}) + c \cdot \partial(x^{\frac{1}{2}}) - e \cdot \partial x;$$

d. h.

$$\partial\varphi = -\frac{a \cdot \partial x}{2x\sqrt{x}} + \frac{c \cdot \partial x}{2\sqrt{x}} - e \cdot \partial x.$$

Beispiel 8. Ist $\varphi = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{x^2}$, so ist

$$\partial\varphi = b \cdot \partial(x^{-\frac{2}{3}}) - c \cdot \partial(x^{-\frac{4}{3}}) + f \cdot \partial(x^{-2})$$

$$= (-\tfrac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}} + \tfrac{4}{3}c \cdot x^{-\frac{7}{3}} - 2f \cdot x^{-3}) \cdot \partial x;$$

d. h.

$$\partial\varphi = \left(-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2f}{x^3}\right) \cdot \partial x.$$

Beispiel 9. Ist $\varphi = \frac{1}{a^2 - x^2}$, so ist $\varphi = (a^2 - x^2)^{-1}$,

also $\partial\varphi = -(a^2-x^2)^{-2} \cdot \partial(a^2-x^2)$;

aber $\partial(a^2-x^2) = -2x \cdot \partial x$,

folglich $\partial\varphi = \frac{2x \cdot \partial x}{(a^2-x^2)^2}$.

Beispiel 10. Ist

$$\varphi = \sqrt{a+bx+cx^2} = (a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}},$$

so ist $\quad \partial\varphi = \frac{1}{2}(a+bx+cx^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial(a+bx+cx^2);$

d. h. $\quad \partial\varphi = \frac{b\cdot\partial x + 2cx\cdot\partial x}{2\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\frac{1}{2}b+cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot\partial x.$

Beispiel 11. Ist $\varphi = \sqrt[3]{(a^4-x^4)^2} = (a^4-x^4)^{\frac{2}{3}}$,

so ist $\quad \partial\varphi = \frac{2}{3}(a^4-x^4)^{-\frac{1}{3}}\cdot\partial(a^4-x^4);$

d. h. $\quad \partial\varphi = \frac{-8x^3\cdot\partial x}{3\sqrt[3]{a^4-x^4}}.$

Beispiel 12. Ist $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

so ist $\quad \partial\varphi = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\partial(1-x^2),$

d. h. $\quad \partial\varphi = \frac{x\cdot\partial x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

Beispiel 13. Ist

$$\varphi = \sqrt[3]{a+\sqrt{bx}+x} = (a+b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x)^{\frac{1}{3}},$$

so ist $\quad \partial\varphi = (a+b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\partial(a+b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x);$

d. h. $\quad \partial\varphi = \frac{(\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+1)\cdot\partial x}{3\sqrt[3]{a+\sqrt{bx}+x}^{\,2}} = \frac{\sqrt{b}+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{a+\sqrt{bx}+x}^{\,2}}\cdot\partial x.$

Beispiel 14. Ist

$$\varphi = x + \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = [x+(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1},$$

so ist $\quad \partial\varphi = -[x+(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]^{-2}\cdot\partial[x+(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}];$

aber $\partial[x+(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}] = \partial x + \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\partial(a^2-x^2);$

folglich

$$\partial\varphi = \frac{-1+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}\cdot\partial x.$$

Weil jedoch der Nenner $= a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$ ist, so erhält man noch

$$\partial\varphi = \frac{x-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}\cdot(a^2+2x\sqrt{a^2-x^2})}\cdot\partial x$$

$$= \frac{x-\sqrt{a^2-x^2}}{2x(a^2-x^2)+a^2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\partial x.$$

Beispiel 15. Ist

$$\varphi = \sqrt[4]{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-x^2)^2}\right)^3} = \left[1-x^{-\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{4}},$$

so ist

$$\partial\varphi = \tfrac{3}{4}\left[1-x^{-\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot\partial\left[1-x^{-\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Nun ist aber

$$\partial\left[1-x^{-\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\right] = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot\partial x+\tfrac{2}{3}(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot\partial(1-x^2);$$

folglich

$$\partial\varphi = \frac{\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{4x}{\sqrt[3]{1-x^2}}}{4\sqrt[4]{\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(1-x^2)^2}\right]}}\cdot\partial x.$$

Beispiel 16. Ist $\varphi = (a+x)(b-x)$, so ist φ ein Product aus $a+x, = y$ und $b-x, = z$; also

$\partial\varphi = z\cdot\partial y+y\cdot\partial z$, während $\partial y = \partial x$, $\partial z = -\partial x$ ist, so daß

$\partial\varphi = (b-x)\cdot\partial x-(a+x)\cdot\partial x = (b-a-2x)\cdot\partial x$ wird.

Beispiel 17. Ist $\varphi = \frac{1}{x}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$, so ist $\varphi = yz$, wenn $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und $z = (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; also ist

$$\partial\varphi = z\cdot\partial y+y\cdot\partial z,$$

während $\partial y = -\frac{\partial x}{x^2}$ und $\partial z = \frac{-x\cdot\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ist, so daß

$$\partial\varphi = -\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{\partial x}{x^2}-\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\partial x \text{ wird.}$$

Beispiel 18. Ist $\varphi = \frac{x^2}{\sqrt{a^4+x^4}}$, so ist $\varphi = \frac{y}{z}$, wenn $y = x^2$ und $z = (a^4+x^4)^{\frac{1}{2}}$ ist, also

$$\partial\varphi = \frac{z\cdot\partial y - y\cdot\partial z}{z^2},$$

während $\partial y = 2x\cdot\partial x$, $\partial z = \frac{2x^3\cdot\partial x}{\sqrt{a^4+x^4}}$ ist, so daß wird

$$\partial\varphi = \frac{2x\cdot\sqrt{a^4+x^4} - \frac{2x^5}{\sqrt{a^4+x^4}}}{a^4+x^4}\cdot\partial x = \frac{2a^4x}{(a^4+x^4)\cdot\sqrt{a^4+x^4}}\cdot\partial x.$$

Beispiel 19. Ist $\varphi = \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$,

so ist $\varphi = \frac{x}{z}$, wenn $z = x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$; also

$$\partial\varphi = \frac{z\cdot\partial x - x\cdot\partial z}{z^2},$$

während

$$\partial z = \partial x + \tfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\partial(1+x^2) = \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\partial x \text{ ist;}$$

so daß man hat

$$\partial\varphi = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(\sqrt{1+x^2}+x)\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot\partial x,$$

welches Ausdrucks Zähler und Nenner noch mit $\sqrt{1+x^2}-x$, auch noch mit $\sqrt{1+x^2}+x$ multiplizirt werden kann, so daß noch erhalten wird

$$\partial\varphi = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\partial x = \frac{1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\partial x;$$

und auch

$$\partial\varphi = \frac{1}{(1+2x^2+2x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}\cdot\partial x,$$

welches letztere aus dem zunächst vorhergehenden Resultat auch dadurch erhalten wird, daß man Zähler und Nenner mit $1+2x^2+2x\sqrt{1+x^2}$ multiplizirt.*)

---

*) Man konnte auch sogleich $\varphi = \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$ in $\varphi = x\cdot[\sqrt{1+x^2}-x]$ verwandeln, Zähler und Nenner mit $\sqrt{1+x^2}-x$ multiplizirend, und erhielt dann sogleich

Beispiel 20. Ist $\varphi = (a+x)(b-x)(x-c)$, so ist

$$\partial\varphi = [(b-x)(x-c)-(a+x)(x-c)+(a+x)(b-x)]\cdot\partial x$$
$$= -[(x-b)(x-c)+(x+a)(x-c)+(x+a)(x-b)]\cdot\partial x$$
$$= -[3x^2+2(a-b-c)x+(bc-ac-ab)]\cdot\partial x.$$

Beispiel 21. Ist $\varphi = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$, so ist

$$\partial\varphi = (a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}\cdot\partial x+2x^2\sqrt{a^2-x^2}\cdot\partial x-\frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\partial x$$
$$= \frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\partial x.$$

Beispiel 22. Ist $\varphi = \frac{x}{a^2+x^2}$, so wird $\partial\varphi = \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\cdot\partial x.$

Beispiel 23. Ist $\varphi = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2-x^2}$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{(a^2-x^2)\cdot\partial[(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}]-\sqrt{a^2+x^2}\cdot\partial(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2};$$

d. h.

$$\partial\varphi = \frac{(3a^2+x^2)x}{(a^2-x^2)^2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\partial x.$$

Beispiel 24. Ist $\varphi = \frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$, so ist

$$\partial\varphi = -\frac{2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}\cdot\partial x.$$

Beispiel 25. Ist $\varphi = log(x^n)$, so ist

$$\varphi = log\, y, \quad \text{wenn} \quad y = x^n;$$

folglich $\partial\varphi = \frac{\partial y}{y}$, und $\partial y = nx^{n-1}\cdot\partial x$;

also $\partial\varphi = \frac{nx^{n-1}\cdot\partial x}{x^n} = \frac{n}{x}\cdot\partial x.$ *)

$$\partial\varphi = (\sqrt{1+x^2}-x)\cdot\partial x+x\left(\frac{x\cdot\partial x}{\sqrt{1+x^2}}-\partial x\right)$$
$$= \frac{1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\partial x.$$

*) Da $log(x^n) = n\cdot log\, x$,

Beispiel 26. Ist $\varphi = log(1+x^2)$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2x\cdot\partial x}{1+x^2}.$$

Beispiel 27. Ist $\varphi = log\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})} = -log(\sqrt{1-x^2})$,

so ist

$$\partial\varphi = -\frac{\partial(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\cdot\partial x}{1-x^2}.\ *)$$

Beispiel 28. Ist $\varphi = log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, so ist

$$\varphi = log x - \tfrac{1}{2}log(1+x^2);$$ also

$$\partial\varphi = \frac{\partial x}{x} - \frac{x\cdot\partial x}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}\cdot\partial x.$$

Beispiel 29. Ist $\varphi = log(x+\sqrt{1+x^2})$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\partial x.$$

Beispiel 30. Ist $\varphi = \frac{1}{i}\cdot log(xi+\sqrt{1-x^2})$, unter i die $\sqrt{-1}$ verstanden, so ist

$$\partial\varphi = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial(xi+\sqrt{1-x^2})}{xi+\sqrt{1-x^2}};$$

aber $\partial(xi) = i\cdot\partial x$ und $\partial(\sqrt{1-x^2}) = \frac{-x\cdot\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$;

folglich, weil $i^2 = -1$ ist,

$$\partial\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\partial x.$$

---

so folgt auch

$$\partial[log(x^n)] = n\cdot\partial(log x) = \frac{n\cdot\partial x}{x}.$$

*) Weil $-log(\sqrt{1-x^2}) = -\frac{1}{2}.log(1-x^2)$ ist, so ergibt sich hieraus $\partial\varphi$ noch leichter.

Beispiel 31. Ist $\varphi = log\left(\frac{yz}{wu}\right)$,

so ist $\varphi = log\,y + log\,z - log\,w - log\,u$;

also $\partial\varphi = \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z} - \frac{\partial w}{w} - \frac{\partial u}{u}$,

wenn nur y, z, w, u Funktionen eines und desselben Veränderlichen sind, nach welchem die Ableitungen genommen werden.

Beispiel 32. Ist $\varphi = log\frac{y^m \cdot z^n}{w^p \cdot u^q}$, so ist

$$\varphi = m \cdot log\,y + n \cdot log\,z - p \cdot log\,w - q \cdot log\,u;$$

also $\partial\varphi = \frac{m \cdot \partial y}{y} + \frac{n \cdot \partial z}{z} - \frac{p \cdot \partial w}{w} - \frac{q \cdot \partial u}{u}$.

Beispiel 33. Ist $\varphi = log[(a+x)(b+x)(c+x)]$,

so ist $\partial\varphi = \frac{\partial x}{a+x} + \frac{\partial x}{b+x} + \frac{\partial x}{c+x}$.

Beispiel 34. Ist $\varphi = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, so ist

$$\varphi = \tfrac{1}{2}log(1+x) - \tfrac{1}{2}log(1-x),$$

also $\partial\varphi = \frac{\partial x}{2(1+x)} + \frac{\partial x}{2(1-x)} = \frac{\partial x}{1-x^2}$.

Beispiel 35. Ist $\varphi = log\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)}$,

so ist $\varphi = \tfrac{1}{2}log(\sqrt{1+x^2}+x) - \tfrac{1}{2}log(\sqrt{1+x^2}-x)$,

folglich

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{\partial(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x)} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x},$$

während

$$\partial(\sqrt{1+x^2}+x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)\cdot\partial x$$

und $\partial(\sqrt{1+x^2}-x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)\cdot\partial x$

ist; so daß

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}}$$ wird. *)

Beispiel 36. Ist $\varphi = \log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, so ist

$$\varphi = \log(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) - \log(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}),$$

also

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\partial x - \tfrac{1}{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\partial x;$$

d. h.

$$\partial\varphi = -\frac{\partial x}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}.\ **)$$

Beispiel 37. Ist $\varphi = (\log x)^2$,

so ist $\varphi = y^2$, wenn $y = \log x$;

also $\partial\varphi = 2y\cdot\partial y$, während $\partial y = \frac{\partial x}{x}$ ist;

so daß

$$\partial\varphi = 2\frac{\log x}{x}\cdot\partial x = 2\log x\cdot\frac{\partial x}{x}$$ wird.

---

*) Man konnte auch $\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$ in $(\sqrt{1+x^2}+x)^2$ verwandeln, Zähler und Nenner mit dem Zähler multiplizirend. Dann wurde $\varphi = \log(\sqrt{1+x^2}+x)$

also $$\partial\varphi = \frac{\partial(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**) Man kann auch $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, Zähler und Nenner mit dem Zähler multiplizirend, in $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ verwandeln, und hat dann

$$\varphi = \log(1-\sqrt{1-x^2}) - \log x,$$

also $$\partial\varphi = -\frac{x\cdot\partial x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} - \frac{\partial x}{x}$$

$$= -\frac{x^2+[1-x^2+\sqrt{1-x^2}]}{x\sqrt{1-x^2}\cdot[1+\sqrt{1-x^2}]}\cdot\partial x = -\frac{\partial x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Beispiel 38. Ist $\varphi = (log\, x)^n$, so ist

$$\partial\varphi = n(log\, x)^{n-1}\cdot\partial(log\, x) = \frac{n\cdot(log\, x)^{n-1}}{x}\cdot\partial x.$$

Beispiel 39. Ist $\varphi = (log\, x)\cdot(log\, y)$, unter x und y Funktionen von v verstanden, so ist

$$\partial\varphi = log\, y\cdot\frac{\partial x}{x} + log\, x\cdot\frac{\partial y}{y}.$$

Beispiel 40. Ist $\varphi = x\cdot log\, x$,

so ist $\partial\varphi = log\, x\cdot\partial x + x\cdot\partial\, log\, x$

d. h. $\partial\varphi = (1 + log\, x)\cdot\partial x$.

Beispiel 41. Ist $\varphi = x^m\cdot log\, x$, so ist

$$\partial\varphi = (m x^{m-1} log\, x + x^{m-1})\cdot\partial x = x^{m-1}(1 + m\cdot log\, x)\cdot\partial x.$$

Beispiel 42. Ist $\varphi = x^m\cdot log\, x - \frac{1}{m}x^m$, so ist

$$\partial\varphi = m x^{m-1} log\, x\cdot\partial x.$$

Beispiel 43. Ist $\varphi = x^m\cdot(log\, x)^n$, so ist

$$\partial\varphi = [m x^{m-1}(log\, x)^n + n x^{m-1}(log\, x)^{n-1}]\cdot\partial x.$$

Beispiel 44. Ist $\varphi = log(log\, x)$, so ist

$\varphi = log\, y$, während $y = log\, x$ ist.

Also hat man

$\partial\varphi = \frac{\partial y}{y}$, während $\partial y = \frac{\partial x}{x}$ ist,

so daß

$$\partial\varphi = \frac{\partial x}{xy} = \frac{\partial x}{x\cdot log\, x} = \frac{1}{x\cdot log\, x}\cdot\partial x \text{ wird.}$$

Beispiel 45. Ist $\varphi = log[log(log\, x)]$,

so ist $\varphi = log\, y$, während $y = log(log\, x)$ ist.

Also hat man

$\partial\varphi = \frac{\partial y}{y}$, während $\partial y = \frac{\partial x}{x\cdot log\, x}$ ist,

so daß

$$\partial\varphi = \frac{\partial x}{x\cdot log\, x\cdot log(log\, x)} \text{ wird.}$$

Beispiel 46. Ist $\varphi = e^{nx}$, so ist

$$\varphi = e^y, \quad \text{während} \quad y = nx \quad \text{ist.}$$

Also

$$\partial\varphi = e^y \cdot \partial y, \quad \text{während} \quad \partial y = n \cdot \partial x \quad \text{ist,}$$

so daß man hat:

$$\partial\varphi = n \cdot e^{nx} \cdot \partial x.$$

Beispiel 47. Ist $\varphi = x^x$, so ist

$$\partial\varphi = [x \cdot x^{x-1} + x^x \cdot \log x] \cdot \partial x = x^x[1 + \log x] \cdot \partial x.$$

Beispiel 48. Ist $\varphi = e^x \cdot y$, unter x und y Funktionen von v verstanden, so ist

$$\partial\varphi = y \cdot e^x \cdot \partial x + e^x \cdot \partial y = e^x \cdot (y \cdot \partial x + \partial y).$$

Beispiel 49. Ist $\varphi = e^x \cdot x^n$, so wird

$$\partial\varphi = e^x \cdot (x^n + n x^{n-1}) \cdot \partial x = e^x \cdot x^{n-1} \cdot (x + n) \cdot \partial x.$$

Beispiel 50. Ist $\varphi = e^x(x-1)$, so ist

$$\partial\varphi = e^x \cdot x \cdot \partial x.$$

Beispiel 51. Ist $\varphi = e^x(x^2 - 2x + 2)$, so ist

$$\partial\varphi = e^x \cdot x^2 \cdot \partial x.$$

Beispiel 52. Ist $\varphi = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$,

so ist $$\partial\varphi = e^x \cdot x^3 \cdot \partial x.$$

Beispiel 53. Ist $\varphi = e^{e^x}$ d. h. $e^{(e^x)}$, nicht $(e^e)^x$, so ist

$$\varphi = e^y, \quad \text{während} \quad y = e^x \quad \text{ist, also hat man}$$

$$\partial\varphi = e^y \cdot \partial y, \quad \text{während} \quad \partial y = e^x \cdot \partial x \quad \text{ist;}$$

mithin wird

$$\partial\varphi = e^{e^x} \cdot e^x \cdot \partial x.$$

Beispiel 54. Ist $\varphi = x^{y^z}$, unter der Voraussetzung daß x, y, z Funktionen von v sind, so hat man

$$\varphi = x^u, \quad \text{während} \quad u = y^z \quad \text{ist;}$$

also $$\partial\varphi = u \cdot x^{u-1} \cdot \partial x + x^u \cdot \log x \cdot \partial u,$$

während $\partial u = z \cdot y^{z-1} \cdot \partial y + y^z \cdot log y \cdot \partial z$ ist;
also daß wird

$$\partial\varphi = y^z \cdot x^{y^z - 1} \cdot \partial x + x^{y^z} \cdot (log x) \cdot \left[z \cdot y^{z-1} \partial y + y^z \cdot log y \cdot \partial z\right];$$

d. h.

$$\partial\varphi = x^{y^z}\left[\frac{y^z}{x} \cdot \partial x + z \cdot y^{z-1} \cdot log x \cdot \partial y + y^z \cdot (log x)(log y) \cdot \partial z\right]$$

oder

$$\partial\varphi = x^{y^z} \cdot y^z \cdot \left[\frac{\partial x}{x} + \frac{z}{y}(log x) \cdot \partial y + (log x) \cdot (log y) \cdot \partial z\right].$$

Beispiel 55. Ist $\varphi = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(e^{xi}) - \partial(e^{-xi})}{2i} = \frac{e^{xi} \cdot i + e^{-xi} \cdot i}{2i} \partial x;$$

d. h. $$\partial\varphi = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \partial x.$$

Es ist also

$$\partial(Sin x) = Cos x \cdot \partial x;$$

in so ferne $Sin\ x$ bloß ein Zeichen ist für die Funktion (Zusammensetzung) $\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$, während $\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ durch $Cos\ x$ bezeichnet wird.

Beispiel 56. Ist $\varphi = Cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(e^{xi}) + \partial(e^{-xi})}{2} = \frac{e^{xi} \cdot i - e^{-xi} \cdot i}{2} \partial x;$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit i multiplizirt und bemerkt, daß $i^2 = -1$ wird (weil $i = \sqrt{-1}$ ist),

$$\partial\varphi = -\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \partial x = -Sin x \cdot \partial x.$$

Folglich ist $$\partial(Cos x) = -Sin x \cdot \partial x.$$

Beispiel 57. Ist $\varphi = \frac{1}{Sin} x$ (d. h. $\varphi = arc. Sin x$), so ist $\frac{1}{Sin} x$ (oder $arc. Sin x$) ein bloßes Zeichen, welches nach (§. 4.) die Funktion (Zusammensetzung) $\frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1 - x^2} + xi)$ vorstellt, so

daß eigentlich $\varphi = \frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1-x^2} + xi)$ gegeben ist, woraus sogleich

$$\partial \varphi = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ folgt;}$$

d. h. $\partial\left(\frac{1}{Sin}x\right) = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\left[\text{oder } \partial(\text{arc.} Sin\, x) = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

Beispiel 58. Ist $\varphi = \frac{1}{Cos}x$, (d. h. $\varphi = \text{arc.} Cos\, x$), so ist eigentlich $\varphi = \frac{1}{i} \cdot log(x + i \cdot \sqrt{1-x^2})$; folglich

$$\partial \varphi = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial(x + i\sqrt{1-x^2})}{x + i\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1 - \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}}{x + i\sqrt{1-x^2}} \cdot \partial x,$$

d. h. $\partial \varphi = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$;

oder

$$\partial\left(\frac{1}{Cos}x\right) = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}; \left[\text{oder } \partial(\text{arc.} Sin\, x) = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}\right].$$

Beispiel 59. Ist $\varphi = \frac{1}{Tg}x$ (d. h. $\varphi = \text{arc.} Tg\, x$), so ist eigentlich $\varphi = \frac{1}{2i} \cdot log\frac{1+ix}{1-ix}$,

mithin $\partial \varphi = \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1+ix} + \frac{i}{1-ix}\right) \cdot \partial x = \frac{\partial x}{1+x^2}$,

d. h. $\partial\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \frac{\partial x}{1+x^2}$ $\left(\text{oder } \partial \text{ arc.} Tg\, x = \frac{\partial x}{1+x^2}\right)$.

Beispiel 60. Ist $\varphi = \frac{1}{Cotg}x$,

so ist eigentlich $\varphi = \frac{1}{2i} \cdot log\frac{x+i}{x-i}$,

folglich $\partial \varphi = -\frac{\partial x}{1+x^2}$;

d. h. $\partial\left(\frac{1}{Cotg}x\right) = -\frac{\partial x}{1+x^2}$.

Anmerkung. In allen diesen Beispielen ist x als eine Funktion von v gedacht; und in allen ist dann die Ableitung nach allem v gesucht worden. — Will man aber hieraus die Ableitungen nach x finden, so darf man nur, weil ∂x jetzt aus ∂x_v in ∂x_x d. h. in 1 übergeht, überall 1 statt ∂x setzen, und dieselben Resultate sind zu gleicher Zeit diejenigen, welche als Ableitungen nach allem x sich ergeben.

Ueberhaupt hat man sich wegen des Uebergangs der Ableitungen nach allem v, in solche nach allem x genommen, oder umgekehrt, bloß an den Satz (§. 34. I.) zu halten, welcher lehrt daß

$$\partial \varphi = \partial \varphi_{(x)} \cdot \partial x,$$

folglich $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \partial \varphi_{(x)}$$ ist,

wo die bloßen $\partial \varphi$ und ∂x, Ableitungen nach allem v bedeuten.

§. 42. Zusatz.

Für die Praxis ist es bequem die Ableitungen gewisser Funktionen, welche oft wiederkehren, ein für allemal zu finden, und die Resultate zugleich mit den Ableitungen der einfachsten Funktionen im Gedächtniß zu behalten, um solche bei den Ableitungen der aus ihnen zusammengesetzten Funktionen nicht immer auf's neue entwickeln zu müssen. Daher bemerke man sich noch folgende:

1) $\partial(Sin\,x) = Cos\,x \cdot \partial x,$

2) $\partial(Cos\,x) = -Sin\,x \cdot \partial x;$

3) $\partial(Tg\,x) = \frac{1}{Cos\,x^2} \cdot \partial x$ *);

4) $\partial(Cotg\,x) = -\frac{1}{Sin\,x^2} \cdot \partial x$ **);

---

*) Es ist nämlich $\partial(Tg\,x) = \partial\left(\frac{Sin\,x}{Cos\,x}\right)$.

**) Nämlich $\partial(Cotg\,x) = \partial\left(\frac{Cos\,x}{Sin\,x}\right)$.

5) $\partial(Sec\,x) = \frac{Sin\,x}{Cos\,x^2} \cdot \partial x$ *) $= Sec\,x \cdot Tg\,x \cdot \partial x$;

6) $\partial(Cosec\,x) = -\frac{Cos\,x}{Sin\,x^2} \cdot \partial x$ **)

$= -Cosec\,x \cdot Cotg\,x \cdot \partial x$;

7) $\partial\left(\frac{1}{Sin}x\right) = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$;

8) $\partial\left(\frac{1}{Cos}x\right) = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $\partial\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \frac{\partial x}{1+x^2}$;

10) $\partial\left(\frac{1}{Cotg}x\right) = -\frac{\partial x}{1+x^2}$;

11) $\partial(x^m \cdot y^n) = x^{m-1} y^{n-1} \cdot (my \cdot \partial x + nx \cdot \partial y)$;

12) $\partial\left(\frac{x^m}{y^n}\right) = \frac{my \cdot \partial x - nx \cdot \partial y}{y^{n+1}}$;

13) $\partial(x^m y^n z^p) = x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} \cdot (myz \cdot \partial x + nxz \cdot \partial y + pxy \cdot \partial z)$;

14) $\partial\left(\frac{x^m \cdot y^n}{z^p}\right) = \frac{x^{m-1} y^{n-1} \cdot (myz \cdot \partial x + nxz \cdot \partial y - pxy \cdot \partial z)}{z^{p+1}}$;

15) $\partial\left(\frac{x^m \cdot y^n}{z^p \cdot u^q}\right)$

$= \frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot (myzu \cdot \partial x + nxzu \cdot \partial y - pxyu \cdot \partial z - qxyz \cdot \partial u)}{z^{p+1} \cdot u^{q+1}}$;

16) $\partial(e^x \cdot y) = e^x(y \cdot \partial x + \partial y)$;

17) $\partial\,log(x^m \cdot y^n) = \frac{m \cdot \partial x}{x} + \frac{n \cdot \partial y}{y}$;

18) $\partial\,log\left(\frac{x^m \cdot y^n}{z^p \cdot u^q}\right) = \frac{m \cdot \partial x}{x} + \frac{n \cdot \partial y}{y} - \frac{p \cdot \partial z}{z} - \frac{q \cdot \partial u}{u}$. ***)

---

*) Nämlich $\partial(Sec\,x) = \partial\left(\frac{1}{Cos\,x}\right) = \partial((Cos\,x)^{-1})$.

**) Nämlich $\partial(Cosec\,x) = \partial\left(\frac{1}{Sin\,x}\right) = \partial((Sin\,x)^{-1})$.

***) Man kann aber diese logarithmischen Ableitungen jedesmal

Beispiel 1. Ist $\varphi = log(Sin\,x)$, so hat man

$$\partial\varphi = \frac{\partial(Sin\,x)}{Sin\,x} = \frac{Cos\,x}{Sin}\cdot\partial x = Cotg\,x\cdot\partial x.$$

Beispiel 2. Ist $\varphi = log(Cos\,x)$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(Cos\,x)}{Cos\,x} = -Tg\,x\cdot\partial x.$$

Beispiel 3. Ist $\varphi = log(Tg\,x)$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(Tg\,x)}{Tg} = \frac{1}{Sin\,x\cdot Cos\,x}\cdot\partial x.$$

Beispiel 4. Ist $\varphi = log(Cotg\,x)$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial(Cotg\,x)}{Cotg\,x} = -\frac{1}{Sin\,x\cdot Cos\,x}\cdot\partial x.$$

Beispiel 5. Ist $\varphi = Sin(Sin\,x)$, so ist

$\varphi = Sin\,y$, wennn $y = Sin\,x$;

also $\partial\varphi = Cos\,y\cdot\partial y$, während $\partial y = Cos\,x\cdot\partial x$ ist,

so daß $\partial\varphi = Cos(Sin\,x)\cdot Cos\,x\cdot\partial x$ wird.

Beispiel 6. Ist $\varphi = Sin(Cos\,x)$, so ist

$$\partial\varphi = Cos(Cos\,x)\cdot\partial(Cos\,x) = -Cos(Cos\,x)\cdot Sin\,x\cdot\partial x.$$

Beispiel 7. Ist $\varphi = Cos(Sin\,x)$, so ist

$$\partial\varphi = -Sin(Sin\,x)\cdot Cos\,x\cdot\partial x.$$

Beispiel 8. Ist $\varphi = Cos(Cos\,x)$, so ist

$$\partial\varphi = Sin(Cos\,x)\cdot Sin\,x\cdot\partial x.$$

Beispiel 9. Ist $\varphi = log\left(\frac{1}{Sin}x\right)$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial\left(\frac{1}{Sin}x\right)}{\frac{1}{Sin}x} = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{Sin}x}.$$

---

am bequemsten finden, wenn man bedenkt, daß

$$log(x^m\cdot y^n) = log(x^m) + log(y^n) = m\cdot log\,x + n\cdot log\,y;$$

$$log\left(\frac{x^m\cdot y^n}{z^p\cdot u^q}\right) = m\cdot log\,x + n\cdot log\,y - p\cdot log\,z - q\cdot log\,u;$$

u. s. w. f. ist.

Beispiel 10. Ist $\varphi = log\left(\frac{1}{Tg}x\right)$, so ist

$$\partial\varphi = \frac{\partial\left(\frac{1}{Tg}x\right)}{\frac{1}{Tg}x} = \frac{\partial x}{(1+x^2)\cdot\frac{1}{Tg}x}.$$

Beispiel 11. Ist $\varphi = Sin\,x(log)$, so ist

$$\partial\varphi = Cos(log\,x)\cdot\frac{\partial x}{x}.$$

§. 42. a. Zusatz.

Noch mehr Uebungsbeispiele des Ableitens oder Differenziirens.

I. Beispiele von der Form

$$\partial(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+Dx^\delta+\cdots+Mx^\mu)$$
$$= (\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\delta Dx^{\delta-1}+\cdots+\mu Mx^{\mu-1})\cdot\partial x.$$

1) $\partial(1-2x+3x^2) = (-2+6x)\cdot\partial x;$

2) $\partial\;(-4+x^3) = 3x^2\cdot\partial x;$

3) $\partial\;(1\pm x) = \pm\partial x;$

4) $\partial(-2\sqrt{x}+3x^3) = (-x^{-\frac{1}{2}}+9x^2)\cdot\partial x;$

5) $\partial\left(2x^3-ax^2\sqrt{x}+7bx^{\frac{2}{3}}-8\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{7}{4}x^6\right)$

$$= (6x^2-\tfrac{5}{2}a\cdot x^{\frac{3}{2}}+\tfrac{14}{3}b\cdot x^{-\frac{1}{3}}+12\cdot x^{-\frac{5}{2}}-\tfrac{21}{2}x^5)\cdot\partial x$$
$$= \left(6x^2-\tfrac{5}{2}a\cdot x\sqrt{x}+\frac{14b}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{12}{x^2\sqrt{x}}-\tfrac{21}{2}x^5\right)\cdot\partial x.$$

II. Beispiele von der Form

$$\partial[(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+Dx^\delta+\cdots+Mx^\mu)^m]$$
$$= m(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots+Mx^\mu)^{m-1}\times$$
$$\times(\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\cdots+\mu Mx^{\mu-1})\cdot\partial x.$$

1) $\partial(\sqrt{1-x^2}) = \partial(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\partial x;$

2) $\partial[(1-x)^3] = -3(1-x)^2 \cdot \partial x;$

3) $\partial[(a-x)^m] = -m(a-x)^{m-1} \cdot \partial x;$

4) $\partial[(1-x\sqrt{x}+3x^5)^3]$
$$= 3(1-x\sqrt{x}+3x^5)^2(-\tfrac{3}{2}\sqrt{x}+15x^4) \cdot \partial x;$$

5) $\partial\left[\left(\sqrt[3]{1-x^2+3x^4}\right)^2\right] = \dfrac{-4x+24x^3}{3\cdot\sqrt[3]{(1-x^2+3x^4)}} \cdot \partial x;$

6) $\partial(\sqrt{ax-x^2}) = \dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \cdot \partial x.$

III. Beispiele von der Form

$$\partial\left(\frac{A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots}{a+bx^b+cx^c+\cdots}\right) =$$

$$\left\{\frac{(a+bx^b+cx^c+\cdots)(\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\cdots}{(a+bx^b+cx^c+\cdots)^2} - \frac{(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots)(b\,bx^{b-1}+c\,cx^{c-1}+\cdots)}{(a+bx^b+cx^c+\cdots)^2}\right\} \cdot \partial x.$$

1) $\partial\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \cdot \partial x = \dfrac{2}{(1-x)^2} \cdot \partial x;$

2) $\partial\left(\dfrac{a-bx+cx^2}{mx^3-nx}\right)$

$$= \frac{(mx^3-nx)(-b+2cx)-(a-bx+cx^2)(3mx^2-n)}{(mx^3-nx)^2} \cdot \partial x$$

$$= \frac{an-(cn+3am)x^2+2bmx^3-cmx^4}{(mx^3-nx)^2} \cdot \partial x;$$

3) $\partial\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right) = \dfrac{(1+z^2)(-2z)-(1-z^2)(2z)}{(1+z^2)^2} \cdot \partial z$

$$= -\frac{4z}{(1+z^2)^2} \cdot \partial z;$$

4) $\partial\left(\dfrac{3x^4}{1-x^2}\right) = \dfrac{12x^3-6x^5}{(1-x^2)^2} \cdot \partial x;$

5) $\partial\left(\dfrac{1-7x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}}\right) = \dfrac{-9+7x\sqrt[3]{x}}{12x^2\sqrt{x}} \cdot \partial x;$

$$6)\ \partial\left(\frac{-9+7x\sqrt[3]{x}}{12x^2\sqrt{x}}\right)=\frac{135-49x\sqrt[3]{x}}{72x^3\sqrt{x}}\cdot\partial x.$$

IV. Beispiele von der Form

$$\partial\left(\frac{A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots}{a+bx^b+cx^c+\cdots}\right)^m=m\left(\frac{A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots}{a+bx^b+cx^c+\cdots}\right)^{m-1}\times$$

$$\left\{\frac{(a+bx^b+cx^c+\cdots)(\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\cdots)}{(a+bx^b+cx^c+\cdots)^2}-\frac{(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots)(\mathfrak{b}bx^{\mathfrak{b}-1}+\mathfrak{c}cx^{\mathfrak{c}-1}+\cdots)}{(a+bx^b+cx^c+\cdots)^2}\right\}\cdot\partial x.$$

$$1)\ \partial\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\partial x$$

$$=\frac{\partial x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}};$$

$$2)\ \partial\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]=3\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{\partial x}{(1-x)^2};$$

$$3)\ \partial\left(\sqrt[3]{\frac{x}{1-3x^2}}\right)=\tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1-3x^2}{2x}}\right)^2\cdot\frac{(1+3x^2)\partial x}{(1-3x^2)^2};$$

$$4)\ \partial\left[\left(\sqrt[3]{\frac{a-2x+3bx^2}{4x^3}}\right)^2\right]=\frac{(-3a+4x-3bx^2)\cdot\partial x}{3x^3\cdot\sqrt[3]{2a-4x+6bx^2}}.$$

V. Beispiele von der Form

$$\partial\frac{(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots)^m}{(a+bx^b+cx^c+\cdots)^n}=\frac{(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots)^{m-1}}{(a+bx^b+cx^c+\cdots)^{n+1}}\times$$

$$\times\left[\begin{matrix}m(a+bx^b+cx^c+\cdots)(\beta Bx^{\beta-1}+\gamma Cx^{\gamma-1}+\cdots)\\ -n(A+Bx^\beta+Cx^\gamma+\cdots)(\mathfrak{b}bx^{\mathfrak{b}-1}+\mathfrak{c}cx^{\mathfrak{c}-1}+\cdots)\end{matrix}\right]\cdot\partial x.$$

$$1)\ \partial\left(\frac{(a+bx^2)^3}{(a-bx^2)^2}\right)=\frac{(a+bx^2)^2}{(a-bx^2)^3}\cdot(10a-2bx^2)\cdot bx\cdot\partial x;$$

$$2)\ \partial\left(\frac{\sqrt{a+bx^2}}{\sqrt[3]{1-x}}\right)=\frac{\frac{1}{3}a+bx-\frac{2}{3}bx^2}{(1-x)\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt{a+bx^2}}\cdot\partial x;$$

3) $\partial\left(\frac{(1+x)^2}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^{\frac{7}{2}}}\cdot\frac{9+x}{2}\cdot\partial x;$

4) $\partial\left(\frac{(1-2x+3x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+2x-3x^2)^{\frac{2}{3}}}\right)$

$= \frac{\sqrt{(1-2x+3x^2)}}{(1+2x-3x^2)^{\frac{5}{3}}}\cdot(-\tfrac{13}{3}+\tfrac{29}{3}x+15x^2-15x^3)\cdot\partial x;$

5) $\partial[(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2+x^2)^3] = \frac{(a^2+x^2)^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(7a^2x-5x^3)\cdot\partial x.$

6) $\left[\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}\cdot\partial x.$

VI. Vermischte Beispiele.

1) Wenn

$$y = \frac{a}{b^3}[\tfrac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\cdot log(a+bx)],$$

so ist

$$\partial y = \frac{ax^2}{a+bx}\cdot\partial x.$$

2) Wenn

$$y = 16\sqrt{x} + 9\,log\,x - \tfrac{18}{5}x^3\sqrt[3]{x} - \frac{16}{3\sqrt[4]{x^3}} + 8x^3\sqrt[4]{x},$$

so ist $\partial y = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} - 12x^2\sqrt[3]{x} + \frac{4\sqrt[4]{x}}{x^2} + \frac{26x^3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\cdot\partial x.$

3) Wenn

$$y = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{20}{7}x^2\sqrt[5]{x^4} + \frac{18}{\sqrt[3]{x^2}} + \tfrac{45}{2}\sqrt[15]{x^2} - 25\,log\,x,$$

so ist $\partial y = \left(x^3 + 8x\sqrt[5]{x^4} - \frac{12}{x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[5]{x}} - \frac{25}{x}\right)\cdot\partial x,$

4) Wenn $y = (\tfrac{2}{19}x^3 + \tfrac{4}{13}x^2 + \tfrac{2}{7}x)\sqrt[6]{x},$

so ist $\partial y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}}\cdot\partial x.$

5) Wenn

$$y = \tfrac{2}{3}(3x-5)\left[\tfrac{1}{7}(3x-5)^2 + \tfrac{26}{5}(3x-5) + \tfrac{169}{3}\right]\sqrt{3x-5},$$

so ist $$\partial y = (3x+8)^2\sqrt{3x-5}\cdot\partial x.$$

6) Wenn

$$y = \tfrac{5}{2}(x-30)^2 + 298(x-30) + 4437\cdot log(x-30),$$

so ist $$\partial y = \frac{5x^2-2x-3}{x-30}\cdot\partial x.$$

7) Ist

$$y = \left[\tfrac{9}{11}(5x+2)^2 - \tfrac{111}{8}(5x+2) + \tfrac{786}{5}\right]\cdot(5x+2)\sqrt[3]{(5x+2)^2},$$

so ist $$\partial y = (3x^2-5x+8)\sqrt[3]{(5x+2)^2}\cdot\partial x.$$

8) Ist $y = \tfrac{1}{9}\sqrt[3]{3x-1}\cdot\left[\tfrac{5}{7}(3x-1)^2 + \tfrac{5}{2}(3x-1) - 67\right],$

so ist $$\partial y = \frac{(5x^2-8)\cdot\partial x}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}.$$

9) Ist

$$y = log\frac{(x+3)^{12}}{(x-5)^{40}} - 8(x-5) + \tfrac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3},$$

so ist $$\partial y = \left(\frac{12}{x+3} - \frac{8x}{x-5} + \sqrt{x-3}\right)\cdot\partial x.$$

10) Ist

$$y = 750\sqrt{x} - 1350x\sqrt[6]{x} + \tfrac{13230}{11}x\sqrt[6]{x^5} - \tfrac{2058}{5}x^2\sqrt{x},$$

so ist $$\partial y = \frac{3}{\sqrt{x}}(5-7\sqrt[3]{x^2})^3\cdot\partial x.$$

11) Ist

$$y = -(8-3x^2)^{\frac{5}{3}}\cdot\left[\frac{(8-3x^2)^2}{198} - \frac{8-3x^2}{9} + \frac{32}{45}\right],$$

so ist $$\partial y = x^5\cdot\left(\sqrt[3]{8-3x^2}\right)^2\cdot\partial x.$$

12) Ist $$y = \frac{x^3}{108}\cdot\frac{(6+2x^2)\cdot\sqrt{6+5x^2}}{(6+5x^2)^3},$$

so ist $$\partial y = \frac{x^2\cdot\partial x}{(6+5x^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

13) Ist $y = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot log \frac{\sqrt{b} + x\sqrt{c}}{\sqrt{b} - x\sqrt{c}},$

so ist $\partial y = \frac{a \cdot \partial x}{b - cx^2}.$

14) $\partial \left(\frac{1}{2} log \frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{\partial z}{1-z^2}.$

15) $\partial \left(\frac{1}{2} log \frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{\partial z}{z^2-1}.$

16) $\partial (a\, log\, x + bx) = \frac{a+bx}{x} \cdot \partial x.$

17) $\partial \left(\frac{1}{a} log \frac{x}{a+bx} \right) = \frac{\partial x}{x(a+bx)}.$

18) $\partial \left(\frac{a+bx}{b^2} - \frac{a}{b^2} \cdot log\,(a+bx) \right) = \frac{x \cdot \partial x}{a+bx}.$

19) $\partial \left[\frac{2}{15 b^2} \cdot (3bx - 2a)(a+bx)^{\frac{3}{2}} \right] = x\sqrt{a+bx} \cdot \partial x.$

20) $\partial \left[\frac{2}{3} \frac{bx-2a}{b^2} \cdot \sqrt{a+bx} \right] = \frac{x \cdot \partial x}{\sqrt{a+bx}}.$

21) $\partial \left(\frac{2}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a \pm bx} + \sqrt{a}} \right) = \frac{\partial x}{x \cdot \sqrt{a \pm bx}}.$

22) $\partial \left(2\sqrt{a \pm bx} + 2\sqrt{a} \cdot log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a \pm bx} + \sqrt{a}} \right)$

$$= \frac{\sqrt{a \pm bx}}{x} \cdot \partial x.$$

23) $\partial \left(\frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{Tg} \sqrt{\frac{bx-a}{a}} \right) = \frac{\partial x}{x \cdot \sqrt{bx-a}}.$

24) $\partial \left(2\sqrt{bx-a} - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{Tg} \sqrt{\frac{bx-a}{a}} \right)$

$$= \frac{\sqrt{bx-a}}{x} \cdot \partial x.$$

25) $\partial \left(a \cdot log\, x + \frac{c}{2} x^2 \right) = \frac{a + cx^2}{x} \cdot \partial x.$

26) $$\partial\left[\frac{1}{2c}\cdot log\,(a+cx^2)\right] = \frac{x\cdot\partial x}{a+cx^2}.$$

27) $$\partial\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}\cdot\frac{1}{Tg}\,x\sqrt{\frac{c}{a}}\right) = \frac{\partial x}{a+cx^2}.$$

28) $$\partial\left(\frac{1}{2\sqrt{ac}}\cdot log\,\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{c}}{\sqrt{a}-x\sqrt{c}}\right) = \frac{\partial x}{a-cx^2}.$$

29) $$\partial\left(\frac{1}{a}\cdot log\,\frac{x}{\sqrt{a+cx^2}}\right) = \frac{\partial x}{x\cdot(a+cx^2)}.$$

30) $$\partial\left(\frac{1}{a}\cdot log\,x - \frac{1}{2a}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot log\,\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{c}}{\sqrt{a}-x\sqrt{c}}\right)$$
$$= \frac{(a-cx-cx^2)}{ax(a-cx^2)}\cdot\partial x.$$

31) $$\partial\left(\frac{(a+cx^2)\sqrt{a+cx^2}}{3c}\right) = x\cdot\sqrt{a+cx^2}\cdot\partial x.$$

32) $$\partial\left(\frac{1}{c}\sqrt{a+cx^2}\right) = \frac{x\cdot\partial x}{\sqrt{a+cx^2}}.$$

33) $$\partial\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\,log\,(\sqrt{a+cx^2}+x\sqrt{c})\right] = \frac{\partial x}{\sqrt{a+cx^2}}.$$

34) $$\partial\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx^2}{a-cx^2}}\right) = \frac{\partial x}{\sqrt{a-cx^2}}.$$

35) $$\partial\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot log\,\frac{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}{x}\right) = \frac{\partial x}{x\cdot\sqrt{a+cx^2}}$$

36) $$\partial\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{Cotg}\sqrt{\frac{a}{cx^2-a}}\right) = \frac{\partial x}{x\cdot\sqrt{cx^2-a}}.$$

37) $$\partial\left(\sqrt{cx^2-a}-\sqrt{a}\cdot\frac{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx^2-a}{a}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{cx^2-a}}{x}\cdot\partial x.$$

38) $$\partial\left(\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}\cdot log\,\frac{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}{x}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{a+cx^2}}{x}\cdot\partial x.$$

39) $$\partial\left[\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{cx^2+a}+\frac{a}{2\sqrt{c}}\cdot log(\sqrt{cx^2+a}+x\sqrt{c})\right] = \sqrt{cx^2+a}\cdot\partial x.$$

40) $$\partial\left[\tfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{a-cx^2}+\frac{1}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx^2}{a-cx^2}}\right] = \sqrt{a-cx^2}\cdot\partial x.$$

41) Ist
$$y=\frac{x}{2c}\cdot\sqrt{a+cx^2}-\frac{a}{2c\sqrt{c}}log(\sqrt{a+cx^2}+x\sqrt{c}),$$
so ist $$\partial y=\frac{x^2}{\sqrt{a+cx^2}}\cdot\partial x.$$

42) Ist $y=-\frac{x}{2c}\cdot\sqrt{a-cx^2}+\frac{a}{2c\sqrt{c}}\frac{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx^2}{a-cx^2}}$,
so ist $$\partial y=\frac{x^2}{\sqrt{a-cx^2}}\cdot\partial x.$$

43) $$\partial\left(\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot log[\sqrt{b+cx}+\sqrt{cx}]\right)=\frac{\partial x}{\sqrt{bx+cx^2}}.$$

44) $$\partial\left(\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx}{b-cx}}\right)=\frac{\partial x}{\sqrt{bx-cx^2}}.$$

45) Ist $y=\sqrt{bx+cx^2}+\frac{b}{\sqrt{c}}\cdot log(\sqrt{b+cx}+\sqrt{cx})$,
so ist $$\partial y=\frac{\sqrt{bx+cx^2}}{x}\cdot\partial x.$$

46) Ist $y=\sqrt{bx-cx^2}+\frac{b}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx}{b-cx}}$,
so ist $$\partial y=\frac{\sqrt{bx-cx^2}}{x}\cdot\partial x.$$

47) Ist
$$y=\frac{1}{c}\sqrt{bx+cx^2}-\frac{b}{c\sqrt{c}}\cdot log(\sqrt{b+cx}+\sqrt{cx}),$$
so ist $$\partial y=\frac{x}{\sqrt{bx+cx^2}}\cdot\partial x.$$

48) Ist $y = -\frac{1}{c}\sqrt{bx-cx^2} + \frac{b}{c\sqrt{c}} \cdot \overset{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx}{b-cx}}$,

so ist $\partial y = \frac{x}{\sqrt{bx-cx^2}} \cdot \partial x$.

49) Ist

$$y = \frac{2cx+b}{4c} \cdot \sqrt{bx+cx^2} - \frac{b^2}{4c\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx} + \sqrt{cx}),$$

so ist $\partial y = \sqrt{bx+cx^2} \cdot \partial x$.

50) Ist

$$y = \frac{2cx-b}{4c} \cdot \sqrt{bx-cx^2} + \frac{b^2}{4c\sqrt{c}} \cdot \overset{1}{Tg}\sqrt{\frac{cx}{b-cx}},$$

so ist $\partial y = \sqrt{bx-cx^2} \cdot \partial x$.

51) $\partial\left(\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \overset{1}{Tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) = \frac{\partial x}{a+bx+cx^2}$.

52) Ist

$$y = \frac{1}{2c} \cdot log\,(a+bx+cx^2) - \frac{b}{c\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \overset{1}{Tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

so ist $\partial y = \frac{x \cdot \partial x}{a+bx+cx^2}$.

53) Ist

$$y = \frac{1}{a} \cdot log\frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \overset{1}{Tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

so ist $\partial y = \frac{\partial x}{x(a+bx+cx^2)}$.

54) Ist $y = \frac{2}{\sqrt{4ac+b^2}} \cdot log\frac{\sqrt{4ac+b^2}+2cx-b}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$,

so ist $\partial y = \frac{\partial x}{a+bx-cx^2}$.

55) Ist $y = -\frac{1}{2c} \cdot log\,(a+bx-cx^2) +$

$$+ \frac{b}{c\sqrt{4ac+b^2}} \cdot log\frac{\sqrt{4ac+b^2}+(2cx-b)}{\sqrt{a+bx-cx^2}},$$

so ist $\partial y = \frac{x \cdot \partial x}{a+bx-cx^2}$.

56) Ist
$$y = \frac{1}{a}\cdot log\frac{x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} - \frac{b}{a\sqrt{4ac+b^2}}$$
$$\times\, log\frac{\sqrt{4ac+b^2}+(2cx-b)}{\sqrt{a+bx-cx^2}},$$
so ist
$$\partial y = \frac{\partial x}{x(a+bx-cx^2)}.$$

57)
$$\partial\left[\tfrac{1}{8}log(10-12x+4x^2)+\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{Tg}(2x-3)\right]$$
$$= \frac{x\cdot\partial x}{10-12x+4x^2}.$$

58)
$$\partial\left(\tfrac{1}{4}\,log\frac{x^2}{-2+5x-2x^2}-\tfrac{5}{12}log\frac{(4x-2)^2}{-2+5x-2x^2}\right)$$
$$= \frac{\partial x}{x(2-5x+2x^2)}.$$

59)
$$\partial\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{x-2}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\partial x}{16-4x+x^2}.$$

60)
$$\partial\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log(2\sqrt{c\cdot(a+bx+cx^2)}+2cx+b)\right]$$
$$= \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

61)
$$\partial\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{2cx-b}{2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx-cx^2}}\right)$$
$$= \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}.$$

62) Ist
$$y = \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c\sqrt{c}}\times$$
$$\times\, log(2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}+2cx+b),$$
so ist
$$\partial y = \frac{x\cdot\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

63) Ist
$$y = -\frac{1}{c}\sqrt{a+bx-cx^2}+\frac{b}{2c\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{2cx-b}{2\sqrt{c(a+bx-cx^2)}},$$
so ist
$$\partial y = \frac{x\cdot\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}.$$

64) Ist $y = \frac{2cx - 3b}{4c^2} \cdot \sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{4ac - 3b^2}{8c^2\sqrt{c}} \times$

$\times \, log\,(2\sqrt{c(a + bx + cx^2)} + 2cx + b),$

so ist $\partial y = \frac{x^2 \cdot \partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$

65) Ist $y = -\frac{2cx + 3b}{4c^2} \cdot \sqrt{a + bx - cx^2}$

$+ \frac{4ac + 3b^2}{8c^2\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2cx - b}{2\sqrt{c(a + bx - cx^2)}},$

so ist $\partial y = \frac{x^2 \cdot \partial x}{\sqrt{a + bx - cx^2}}.$

66) Ist $y = \frac{2cx + b}{4c} \cdot \sqrt{a + bx + cx^2} +$

$+ \frac{4ac - b^2}{8c\sqrt{c}} \, log\,(2\sqrt{c(a + bx + cx^2)} + 2cx + b),$

so ist $\partial y = \sqrt{a + bx + cx^2} \cdot \partial x.$

67) Ist $y = \frac{2cx - b}{4c} \sqrt{a + bx - cx^2} + \frac{4ac + b^2}{8c\sqrt{c}} \times$

$\times \frac{1}{Tg} \frac{2cx - b}{2\sqrt{c(a + bx - cx^2)}},$

so ist $\partial y = \sqrt{a + bx - cx^2} \cdot \partial x.$

68) Ist

$y = \frac{1}{3c} (\sqrt{a + bx + cx^2})^3 - \frac{b(2cx + b)}{8c^2} \sqrt{a + bx + cx^2}$

$- \frac{b(4ac - b^2)}{16c^2\sqrt{c}} \cdot log\,(2\sqrt{c(a + bx + cx^2)} + 2cx + b),$

so ist $\partial y = x \cdot \sqrt{a + bx + cx^2} \cdot \partial x.$

69) Ist

$y = -\frac{1}{3c} (\sqrt{a + bx - cx^2})^3 + \frac{b(2cx - b)}{8c^2} \sqrt{a + bx - cx^2}$

$+ \frac{b(4ac + b^2)}{16c^2\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2cx - b}{2\sqrt{c(a + bx - cx^2)}},$

so ist $\partial y = x \cdot \sqrt{a + bx - cx^2} \cdot \partial x.$

70) Ist $y = -\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{2\sqrt{a(a+bx+cx^2)}+2a+bx}{x}$,

so ist $\partial y = \frac{\partial x}{x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}$.

71) Ist $y = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2\sqrt{a(-a+bx+cx^2)}}{2a-bx}$,

so ist $\partial y = \frac{\partial x}{x \cdot \sqrt{-a+bx+cx^2}}$.

72) Ist

$$y = \sqrt{a+bx+cx^2} - \sqrt{a} \cdot log \frac{2\sqrt{a(a+bx+cx^2)}+2a+bx}{x}$$
$$+ \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot log\left(2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}+2cx+b\right),$$

so ist $\partial y = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x} \cdot \partial x$.

73) Ist

$$y = \sqrt{-a+bx+cx^2} - \sqrt{a} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2\sqrt{a(-a+bx+cx^2)}}{2a-bx}$$
$$+ \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot log\left(2\sqrt{c(-a+bx+cx^2)}+2cx+b\right),$$

so ist $\partial y = \frac{\sqrt{-a+bx+cx^2}}{x} \cdot \partial x$.

74) Ist

$$y = \sqrt{a+bx-cx^2} - \sqrt{a} \cdot log \frac{2\sqrt{a(a+bx-cx^2)}+2a+bx}{x}$$
$$+ \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c(a+bx-cx^2)}},$$

so ist $\partial y = \frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{x} \cdot \partial x$.

75) Ist

$$y = \sqrt{-a+bx-cx^2} - \sqrt{a} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2\sqrt{a(-a+bx-cx^2)}}{2a-bx}$$
$$+ \frac{b}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c(-a+bx-cx^2)}},$$

so ist $\partial y = \frac{\sqrt{-a+bx-cx^2}}{x} \cdot \partial x$.

76) Ist $y = -\frac{1}{9}\sqrt{7+6x-9x^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{Tg}\frac{3x-1}{\sqrt{7+6x-9x^2}}$,

so ist $$\partial y = \frac{x \cdot \partial x}{\sqrt{7+6x-9x^2}}.$$

77) Ist

$$y = \frac{x-1}{2}\cdot\sqrt{5-8x+4x^2} + \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{5-8x+4x^2}+2x-2\right),$$

so ist $$\partial y = \sqrt{5-8x+4x^2}\cdot\partial x.$$

78) Ist $y = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{3x^2+10x-25}}{5-x}$,

so ist $$\partial y = \frac{\partial x}{x\cdot\sqrt{3x^2+10x-25}}.$$

79) Ist

$$y = \sqrt{12+8x-x^2} - 2\sqrt{3}\cdot\log\frac{4\sqrt{36+24x-3x^2}+24+8x}{x} + 4\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x-4}{\sqrt{12+8x-x^2}},$$

so ist $$\partial y = \frac{\sqrt{12+8x-x^2}}{x}\cdot\partial x.$$

80) Ist $y = \left(-\frac{1}{9bx}+\frac{2c}{63b^2}\right)\frac{2\cdot(bx+cx^2)^{\frac{7}{2}}}{x^7}$,

so ist $$\partial y = \frac{(bx+cx^2)^{\frac{7}{2}}}{x^8}\cdot\partial x.$$

81) Ist $y = \frac{-2(b+cx)^4\sqrt{bx+cx^2}}{9bx^5}$,

so ist $$\partial y = \frac{(\sqrt{bx+cx^2})^7}{x^9}\cdot\partial x.$$

82) Ist

$$y = -\frac{41x-81}{4(x-4)^2} + \frac{45}{32}\cdot\log\frac{x^2-4x+8}{(x-4)^2} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{Tg}\left(\tfrac{1}{2}x-1\right),$$

so ist $$\partial y = \frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3(x^2-4x+8)}\cdot\partial x.$$

83) Ist $y = \frac{-5}{4(8-3x^3)} \cdot \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{21}{16x} - \frac{21x^2}{32}\right)$

$$-\frac{35}{256\sqrt[3]{9}}\left(\tfrac{1}{2}\cdot log \frac{(3x-2\sqrt[3]{9})^2}{3(3x^2+2x\sqrt[3]{9}+4\sqrt[3]{3})} - \sqrt{3}\cdot \overset{1}{Tg} \frac{-3x\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{9}+3x}\right),$$

so ist $\partial y = \frac{20}{x^5(8-3x^3)^2}\cdot \partial x.$

84) Ist $y = \frac{10x^4-16x^2}{12-15x^2+5x^4} + \frac{32}{\sqrt{15}} \cdot \overset{1}{Tg} \frac{\sqrt{15}}{5(3-2x^2)}$,

so ist $\partial y = \frac{20x^5}{(12-15x^2+5x^4)^2} \cdot \partial x.$

85) $\partial\left(\frac{2}{3\,log\,a} \cdot a^{\frac{3x-5}{2}}\right) = a^{\frac{3x-5}{2}} \cdot \partial x.$

86) $\partial\left(\frac{x^{m+1}\cdot log\,x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right) = x^m \cdot log\,x \cdot \partial x.$

87) $\partial\left[Cos\,\varphi\left(\tfrac{1}{5} Sin\,\varphi^4 - \tfrac{1}{15} Sin\,\varphi^2 - \tfrac{2}{15}\right)\right]$
$= Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^2 \cdot \partial\varphi.$

88) Ist

$$y = -\tfrac{1}{6} Cos\,\varphi \cdot \left[\frac{1}{Sin\,\varphi^6} + \tfrac{5}{4}\cdot\frac{1}{Sin\,\varphi^4} + \tfrac{15}{8}\cdot\frac{1}{Sin\,\varphi^2}\right] + \tfrac{5}{16} log\left(Tg\,\tfrac{1}{2}\varphi\right),$$

so ist $\partial y = \frac{\partial\varphi}{Sin\,\varphi^7}.$

89) Ist

$$y = -\tfrac{1}{6} Cos\,\varphi \cdot \left[Sin\,\varphi^5 + \tfrac{5}{4} Sin\,\varphi^3 + \tfrac{15}{8} Sin\,\varphi\right] + \tfrac{5}{16}\varphi,$$

so ist $\partial y = Sin\,\varphi^6 \cdot \partial\varphi.$

90) Ist

$$y = -Tg\,\varphi \cdot \left[\tfrac{1}{5}\cdot Cotg\,\varphi^6 + \tfrac{2}{3}\cdot Cotg\,\varphi^4 + Cotg\,\varphi^2\right],$$

so ist $\partial y = \frac{\partial\varphi}{Sin\,\varphi^6}.$

91) Ist $y = log\,\frac{\sqrt{b+a} + Tg\,\frac{1}{2}\varphi\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a} - Tg\,\frac{1}{2}\varphi\sqrt{b-a}}$,

so ist $\partial y = \frac{\partial\varphi}{a+b\cdot Cos\,\varphi}.$

92) Ist

$$y = -\tfrac{256}{43}\cdot\left[\frac{x}{24(x^2+12)} + \frac{1}{24\sqrt{12}}\cdot\overset{1}{Tg}\frac{x}{\sqrt{12}}\right] - \tfrac{33}{43}\cdot\frac{1}{2(x^2+12)},$$

so ist
$$\partial y = \frac{-256+33x}{43(x^2+12)^2}\cdot\partial x.$$

In allen diesen Beispielen hat man x und y, oder φ und y als die Veränderlichen betrachtet und zwar als solche, welche wieder Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen (z. B. v) sind, so daß die bloßen (∂) auf diesen ungenannten Veränderlichen (v) sich beziehen.

Nimmt man nachgehends $v = x$, oder $v = \varphi$, d. h. sollen die Ableitungen nach x oder nach φ genommen werden, so darf man nur

$$\partial x = 1 \qquad \text{oder} \qquad \partial\varphi = 1$$

nehmen, und man hat zu gleicher Zeit die Ableitungen aller dieser durch y bezeichneten, oder direkt hingeschriebenen Funktionen von x (oder von φ) nach x selbst (oder nach φ selbst) genommen.

Schluß-Anmerkung.

Obgleich aber nach (§. 19.) aus den Ableitungen nach x, sogleich die Differenzialien nach x gefunden werden können, indem man allemal

$$d\varphi = \partial\varphi_x \cdot dx$$

hat, so oft φ eine Funktion von x ist, so mag doch in der nächsten Abtheilung die Differenzialrechnung selbst noch etwas näher verfolgt werden, um den Geist derselben immer noch näher an das Licht treten zu lassen, so wie die Art und Weise des Zusammenhanges, in welchem die Ableitungsrechnung und die Differenzialrechnung zu einander stehen.

Dritte Abtheilung.

Von den Parzial-Differenzialien. Allgemeine Lehrsätze. Darauf gegründetes systematisches Differenziiren aller entwickelt gegebenen Funktionen einer oder mehrer Veränderlichen.

---

§. 43. Lehrsatz.

I. Ist f eine Funktion von x und y, und denkt man sich, wie im (§. 32.), x um $\varkappa \cdot \delta x$ und zu gleicher Zeit y um $\varkappa \cdot \delta y$ wachsend, so wie den Zuwachs, welchen dadurch f erleidet, durch $\varkappa \cdot \delta f$ vorgestellt, so hat man allemal

$$\varkappa \cdot \delta f = (\partial f_x \cdot \delta x + \partial f_y \cdot \delta y) \cdot \varkappa$$
$$+ (\partial^2 f_x \cdot \delta x^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \partial^2 f_y \cdot \delta y^2) \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdots$$

nach Potenzen von $\varkappa$ geordnet.

II. Und ist f eine Funktion von x, y und z, in welcher der Zuwachs $\varkappa \cdot \delta f$ dadurch hervorgebracht wird, daß x um $\varkappa \cdot \delta x$, y um $\varkappa \cdot \delta y$, und z um $\varkappa \cdot \delta z$ zu gleicher Zeit wachsen, so hat man

$$\varkappa \cdot \delta f = (\partial f_x \cdot \delta x + \partial f_y \cdot \delta y + \partial f_z \cdot \delta z) \cdot \varkappa$$
$$+ (\partial^2 f_x \cdot \delta x^2 + 2 \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \partial^2 f_y \cdot \delta y^2 + 2 \partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \delta x \cdot \delta z$$
$$+ 2 \cdot \partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \delta y \cdot \delta z + \partial^2 f_z \cdot \delta z^2) \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdots$$

nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ geordnet.

III. Und eben so wird

$$\varkappa \cdot \delta f = (\partial f_x \cdot \delta x + \partial f_y \cdot \delta y + \partial f_z \cdot \delta z + \partial f_u \cdot \delta u) \cdot \varkappa + (\cdots\cdots) \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdots$$

nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ geordnet, wenn f eine Funktion von x, y, z und u ist, und $\varkappa \cdot \delta f$ den Zuwachs bedeutet, welchen f dadurch erleidet, daß x, y, z, u zu gleicher Zeit um $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa \cdot \delta z$, $\varkappa \cdot \delta u$ wachsend gedacht werden.

IV. Aehnliches für Funktionen von beliebig viel Veränderlichen.

Beweis ergiebt sich unmittelbar aus (§. 32.), in so ferne man in den dortigen Gleichungen, auf jeder Seite, f selbst nur subtrahiren darf, um sogleich die hiesigen zu haben.

§. 44. Zusatz.

Ist aber z. B. y selber wieder eine Funktion von x, so ist auch noch nach dem Taylor'schen Lehrsatze der Zuwachs von y von dem Zuwachs von x abhängig, nämlich nach (§. 32. N. 1. §. 12.)

$$\varkappa \cdot \delta y = \partial y_x \cdot \delta x \cdot \varkappa + \partial^2 y_x \cdot \delta x^2 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots,$$

also δy dann selbst eine nach $\varkappa$ fortgehende Reihe, deren erstes Glied jedoch $\partial y_x \cdot \delta x$, also ohne $\varkappa$ ist.

Dasselbe gilt von δz, δu, ꝛc., wenn z, u, ꝛc. selber wieder Funktionen von x seyn sollten.

Sind aber x, y, ꝛc. selber Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen v, welche ihre Zuwachse dadurch erhalten, daß v um $\varkappa \cdot \delta v$ wächst, so sind diese Zuwachse $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, ꝛc. selber wieder von dem Zuwachs $\varkappa \cdot \delta v$ abhängig, und zwar nach dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 32. N. 1. §. 12.) wie folgt:

$$\varkappa \cdot \delta x = \partial x_v \cdot \delta x \cdot \varkappa + \partial^2 x_v \cdot \delta x^2 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

$$\varkappa \cdot \delta y = \partial y_v \cdot \delta y \cdot \varkappa + \partial^2 y_v \cdot \delta y^2 \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

u. s. w. f.; und es sind also dann δx, δy, ꝛc. selber wieder Reihen, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen, deren jedesmaliges erstes Glied jedoch ohne $\varkappa$ ist, nämlich beziehlich

$$\partial x_v \cdot \delta x, \quad \partial y_v \cdot \delta y, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Sind endlich x, y, z, ꝛc. von einander ganz unabhängig, so sind auch die Zuwachse $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa \cdot \delta z$, ꝛc. als von einander ganz unabhängig anzusehen, und es ist dann nicht nöthig, sich δx, δy oder δz, ꝛc. als noch $\varkappa$ enthaltend zu denken.

Wären aber z, u, ꝛc. Funktionen von x und y, so würden die Zuwachse $\varkappa \cdot \delta z$ und $\varkappa \cdot \delta u$ wiederum von $\varkappa \cdot \delta x$ und $\varkappa \cdot \delta y$ abhängen, so zwar daß man hätte

$$\varkappa \cdot \delta z = (\partial z_x \cdot \delta x + \partial z_y \cdot \delta y) \cdot \varkappa + (\cdots\cdot)\frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdot$$

$$\varkappa \cdot \delta u = (\partial u_x \cdot \delta x + \partial u_y \cdot \delta y) \cdot \varkappa + (\cdots\cdot)\frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots\cdot$$

und es sind also dann δz, δu, selber wieder Reihen nach $\varkappa$, deren erstes Glied jedoch allemal ohne $\varkappa$ ist.

§. 45. Zusatz.

Wird nun $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht; werden die dann ebenfalls im Moment des Verschwindens befindlichen Zuwachse $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa \cdot \delta z$, $\varkappa \cdot \delta u$, ꝛc. eben so $\varkappa \cdot \delta f$ beziehlich durch dx, dy, dz, du, ꝛc. und durch df bezeichnet; und werden endlich im Sinne der Differenzialrechnung alle höhern Potenzen des im Moment des Verschwindens befindlichen $\varkappa$, gegen eine niedrigere Potenz desselben $\varkappa$ als verschwindend gedacht [in dem Sinne daß

$P \cdot \varkappa^n + Q \cdot \varkappa^{n+1} = (P + Q \cdot \varkappa) \cdot \varkappa^n$ ist, daß also $Q \cdot \varkappa$ gegen P im Moment des Verschwindens ist, ein Sinn, welcher nach (§. 19.) Resultate liefert, die von der Wahrheit um etwas abweichen, was selber im Moment des Verschwindens ist] und außer Acht gelassen, so gehen die Gleichungen des (§. 43.) in folgende über:

I. Wenn f eine Funktion von x und y ist, welche letztere beide zugleich um dx und dy wachsen, so ist

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy.$$

II. Wenn f eine Funktion von x, y und z ist, welche letztere alle zugleich beziehlich um dx, dy, dz wachsen, so ist

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz.$$

III. Wenn f eine Funktion von x, y, z und u ist, welche letztere alle zu gleicher Zeit beziehlich um dx, dy, dz, du wachsend gedacht werden, so ist

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy + \partial f_z \cdot dz + \partial f_u \cdot du.^{*})$$

IV. U. s. w. f. für Funktionen f von beliebig viel Veränderlichen.

§. 46. Erklärung.

Werden die im Moment des Verschwindens befindlichen Zuwachse von f, welche dadurch hervorgehen, daß von x, y, z, u ꝛc. nur ein einziges wächst, etwa nur x um dx, oder nur y allein um dy, oder nur z allein um dz u. s. w., beziehlich durch df_x, df_y, df_z, df_u, ꝛc. ꝛc. bezeichnet, so werden diese die Parzial-Differenzialien genannt, zum Unterschied von dem im vorhergehenden (§. 45.) durch df bezeichneten, vollständigen Differenziale, welches dadurch entsteht, daß alle Veränderlichen in f zu gleicher Zeit um ihre Differenzialien wachsen.

§. 47. Zusatz.

Mit dieser Bezeichnung hat man, wenn man immer in dem (§. 19.) festgestellten Sinne der Differenzialrechnung, alle höhern Potenzen der Differenzialien gegen die niedrigern außer Acht läßt,

1) $df_x = \partial f_x \cdot dx = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx = \frac{df}{dx} \cdot dx;$

2) $df_y = \partial f_y \cdot dy = \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy = \frac{df}{dy} \cdot dy;$

3) $df_z = \partial f_z \cdot dz = \left(\frac{df}{dz}\right) \cdot dz = \frac{df}{dz} \cdot dz;$

4) $df_u = \partial f_u \cdot du = \left(\frac{df}{du}\right) \cdot du = \frac{df}{du} \cdot du;$

u. s. w. f.; wenn man zur Rechten in

---

*) Man unterlasse aber ja nicht, in allen diesen Formeln die (runden) ∂ von den (stehenden und kursiven) d wohl zu unterscheiden. Erstere bedeuten immer Ableitungen, d. h. endliche Funktionen, während letztere d allemal im Moment des Verschwindens befindliche Zuwachse (Differenzialien) vorstellen.

$$\left(\frac{df}{dx}\right),\ \left(\frac{df}{dy}\right),\ \left(\frac{df}{dz}\right),\ \left(\frac{df}{du}\right)\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

nach Euler, oder in den ohne Klammern geschriebenen

$$\frac{df}{dx},\quad \frac{df}{dy},\quad \frac{df}{dz},\quad \frac{df}{du},\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

nach Fontaine, bloß die Ableitungen

$$\partial f_x \quad \partial f_y,\quad \partial f_z,\quad \partial f_u,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

erblickt, also in jedem der verschiedenen Ausdrücke $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}, \frac{df}{du}$, ꝛc. (mit oder ohne Klammern geschrieben) das Zeichen df jedesmal in einem andern Sinne nimmt, nämlich zuerst als das Parzial-Differenzial df_x, hernach als das Parzial-Differenzial df_y, dann als das Parzial-Differenzial df_z, ꝛc. ꝛc.; weil nach (§. 19.)

$$\frac{df_x}{dx} = \partial f_x,\quad \frac{df_y}{dy} = \partial f_y,\quad \frac{df_z}{dz} = \partial f_z \text{ u. s. w.}$$ ist.*)

---

*) Man darf daher hier durchaus nicht $\frac{df}{dx} \cdot dx$ in df umformen (wie $\frac{a}{b} \cdot b$ in a umgeformt wird), wenn man df in einem andern Sinne, als in dem Sinne df_x nehmen wollte. Eben so wenig darf $\frac{df}{dy} \cdot dy$ in df, und eben so wenig $\frac{df}{dz} \cdot dz$ in df, umgewandelt werden, ohne sich df jedesmal in einem andern Sinne zu denken, weil es einmal in dem Sinne df_y, das nächstemal in dem Sinne df_z genommen werden muß. Und weil die gewöhnliche Differenzialrechnung die unterscheidenden Zeichen df_x, df_y, df_z, df_u, ꝛc., welche unter sich und von dem bloßen df nach (§. 46.) in ihren Bedeutungen so wesentlich verschieden sind, nicht gebraucht, so muß sie die Zeichen

$$\frac{df}{dx} \cdot dx,\quad \frac{df}{dy} \cdot dy,\quad \frac{df}{dz} \cdot dz,\quad \frac{df}{du} \cdot du,\ \text{ꝛc.}$$

für die Parzial-Differenzialien ohne Umformung stehen lassen, um sich gerade dadurch jedesmal gehörig erinnert zu sehen, in welchem

§. 48. Zusatz.

Die Gleichungen und Sätze des (§. 45.) nehmen nun bei dieser Bezeichnungsweise, nachstehende Gestalt an:

I. Wenn f eine Funktion von x und y ist, welche beide zugleich um dx und dy wachsend gedacht werden, so ist

$$df = df_x + df_y,$$

oder $$df = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy \quad \text{(nach Euler)},$$

oder $$df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy \quad \text{(nach Fontaine)}.$$

II. Wenn f eine Funktion von x, y und z ist, welche alle 3 zugleich um dx, dy, dz wachsend gedacht sind, so ist

$$df = df_x + df_y + df_z,$$

oder $$df = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy + \left(\frac{df}{dz}\right) \cdot dz \quad \text{(nach Euler)},$$

oder $$df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy + \frac{df}{dz} \cdot dz \quad \text{(nach Fontaine)}.$$

III. Wenn f eine Funktion von x, y, z, u ist, und letztere 4 zu gleicher Zeit um beziehlich dx, dy, dz, du wachsend gedacht werden, so ist

$$df = df_x + df_y + df_z + df_u,$$

Sinne dasselbe Zeichen df jedesmal zu nehmen ist. Und um vor jeder Verwechselung noch gesicherter zu seyn, schließt eben Euler die Differenzial-Quotienten

$$\frac{df_x}{dx}, \quad \frac{df_y}{dy}, \quad \frac{df_z}{dz}, \quad \frac{df_u}{du}, \quad \text{rc.}$$

eben weil sie auch bei ihm bloß so

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz}, \quad \frac{df}{du}, \quad \text{rc.}$$

geschrieben werden, noch besonders in Klammern ein, welche Klammern jedoch in der neuern Zeit von Vielen, namentlich von den Franzosen wiederum weggelassen worden sind.

oder $df = \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot dy + \left(\frac{df}{dz}\right) \cdot dz + \left(\frac{df}{du}\right) \cdot du,$

oder $df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy + \frac{df}{dz} \cdot dz + \frac{df}{du} \cdot du.$

IV. U. s. w. f. für Funktionen von noch mehr und beliebig viel Veränderlichen.*)

Und diese Sätze bleiben in der Differenzial-Rechnung wahr, es mögen x, y, z, ꝛc. also auch dx, dy, dz, ꝛc. von einander ganz unabhängig, oder auch von einander beliebig abhängig seyn, also auch wenn y, z, ꝛc. Funktionen von x, oder x, y, z, ꝛc. wiederum Funktionen eines neuen Veränderlichen v sind, so daß dy, dz ꝛc. in dx, oder dx, dy, dz, du, ꝛc. in dv gegeben sind; und auch wenn etwa z, u, ꝛc. Funktionen von x und y wären, so daß dz, du, ꝛc. wiederum von dx und von dy zugleich abhängig würden; u. s. w. f.

§. 49. Zusatz.

Obgleich diese Sätze des (§. 45. oder §. 48.) für Differenzialien, viele äußere Aehnlichkeit mit den Formeln (§. 35. II. §. 38. III. und §. 40.) für Ableitungen haben, so sind sie doch

---

*) Man wird übrigens aus der (§. 43. — §. 45.) statt gefundenen Entwickelung recht klar erkannt haben, daß diese Differenzial-Formeln deshalb gerade so werden und nicht anders, weil man sich die Differenzialien dx, dy, dz, du, ꝛc. alle von der Form $p \cdot \varkappa$ dachte, wo $\varkappa$ allein im Moment des Verschwindens ist. Hätte man eines dieser Differenzialien in der Form $p \cdot \varkappa^2$ gedacht, so würde das mit ihm multiplizirte Glied, zu den, höhere Potenzen von $\varkappa$ enthaltenden und daher weggelassenen und wegzulassenden Gliedern gehören.

Und aus (§. 44.) geht hervor, daß wenn x, y, z, u, ꝛc. ꝛc. von einander abhängig sind, durch zwischen ihnen statt findende Gleichungen (algebraische oder transcendente), dann die z. B. von dx abhängigen dy, dz, ꝛc., so wie selbst df, wirklich mit dx zugleich als von derselben Form $p \cdot \varkappa$ angesehen werden können, weil die, höhere Potenzen von $\varkappa$ enthaltenden Glieder, gegen dieses erste Glied $p \cdot \varkappa$ als verschwindend angesehen werden.

sehr wesentlich von einander verschieden und zwar dadurch, daß hier in den (§§. 45. 48.) x, y, z, u, ꝛc. sowohl ganz von einander unabhängig, als auch von einander abhängig seyn können, während dort ausdrücklich vorausgesetzt werden mußte, daß x, y, z, u, ꝛc. selber wieder Funktionen von v sind. —

Für den Fall aber, daß hier in den (§. 45. §. 48.) x, y, z, u, ebenfalls Funktionen von v seyn sollen, gehen die hiesigen Formeln und jene, mittelst des Satzes (§. 19. 2.), nach welchem, unter $d\varphi$ das vollständige Differenzial (nach allem v) verstanden,

$$d\varphi = \partial\varphi_{(v)} \cdot dv \quad \text{also auch} \quad \frac{d\varphi}{dv} = \partial\varphi_{(v)}$$

ist, in einander über, so daß sie dann dem Wesen nach nicht mehr von einander verschieden sind.

So wie nämlich x, y, z, u, ꝛc. wiederum Funktionen von v sind, so hat man im Sinne der Differenzialrechnung nach (§. 19.)

$$dx = \partial x_v \cdot dv, \qquad dy = \partial y_v \cdot dv,$$

$$dz = \partial z_v \cdot dv, \qquad du = \partial u_v \cdot dv, \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

also auch

$$\partial x_v = \frac{dx}{dv}, \qquad \partial y_v = \frac{dy}{dv},$$

$$\partial z_v = \frac{dz}{dv}, \qquad \partial u_v = \frac{du}{dv}, \text{ ꝛc. ꝛc.};$$

folglich gehen die Formeln der Ableitungsrechnung (§. 35. §. 38. ꝛc.)

$$1) \quad \partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v$$

oder $\quad 2) \quad \partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v + \partial f_z \cdot \partial z_v$

u. s. w. f., je nachdem f eine (explizite) Funktion von x und y, oder von x, y und z, oder von noch mehr Veränderlichen ist, (nach Euler unter df in $\frac{df}{dv}$, das vollständige Differenzial (nach allem v) verstanden, und

$$\frac{df}{dv}, \quad \left(\frac{df}{dx}\right), \quad \left(\frac{df}{dy}\right), \quad \left(\frac{df}{dz}\right), \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

oder nach Fontaine

$$\frac{\partial(f)}{dv}{}^{*)}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dy}, \quad \frac{df}{dz}, \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

beziehlich statt

$$\partial f_{(v)}, \quad \partial f_x, \quad \partial f_y, \quad \partial f_z, \quad \text{ꝛc. ꝛc.};$$

ferner $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{dv}$, ꝛc. ꝛc.

beziehlich statt ∂x_v, ∂y_v, ∂z_v, ꝛc. ꝛc. setzend), jetzt in folgende

$$3)\quad \frac{df}{dv} = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dv} + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dv}$$

oder

$$\frac{d(f)}{dv} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dv},$$

$$4)\quad \frac{df}{dv} = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dv} + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{df}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dv}$$

oder

$$\frac{d(f)}{dv} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dv}$$

u. s. w. f. über, welche, wenn man die Gleichungen mit dv wegmultiplizirt, wiederum die Differenzialgleichungen

$$5)\quad df = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy \quad \text{(nach Euler)}$$

oder

$$d(f) = \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy \quad \text{(nach Fontaine)},$$

$$6)\quad df = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx + \left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy + \left(\frac{df}{dz}\right)\cdot dz;$$

oder

$$d(f) = \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy + \frac{df}{dz}\cdot dz$$

u. s. w. f.; liefern, wie solche (§. 48.) zu finden sind.

Umgekehrt kann man von den Gleichungen (5. 6.), zu denen (3. 4.), und von diesen wieder zu den Gleichungen (1. 2.) zurück-

---

*) Fontaine schrieb eigentlich nicht $\frac{d(f)}{dv}$, sondern dafür $\frac{1}{dv}\cdot df$.

gehen; wenn nur x, y, z, ꝛc. ꝛc. selber wieder Funktionen eines und desselben Veränderlichen v sind.

§. 50. Zusatz.

Denkt man sich $v = x$, also y, z, ꝛc. als Funktionen von x, so werden die Gleichungen (3. 4.) nach Euler jetzt so aussehen

$$1)\quad \frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx};$$

$$2)\quad \frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{df}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx};$$

wo das links ohne Klammern stehende $\frac{df}{dx}$, in der Bedeutung übereinstimmt mit $\partial f_{(x)}$, so daß also df das vollständige Differenzial (nach allem x) bedeutet.

So wie aber hier auf neuere Weise die Parzial-Differenzialien zur Rechten, ohne Klammern geschrieben werden, so muß links statt $\frac{df}{dx}$ jetzt $\frac{d(f)}{dx}$ oder (wie der Vfr. dieses in seiner „Lehre vom Größten und Kleinsten" Berlin 1825. gethan hat) $\frac{\underline{\underline{d}}f}{\underline{\underline{d}}x}$ gesetzt werden, um solchen vollständigen Differenzialquotienten von dem Parzial-Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}$ gehörig zu unterscheiden; und die Gleichungen (1. u. 2.) sehen dann so aus:

$$3)\quad \frac{d(f)}{dx} \text{ oder } \frac{\underline{\underline{d}}f}{\underline{\underline{d}}x} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$4)\quad \frac{d(f)}{dx} \text{ oder } \frac{\underline{\underline{d}}f}{\underline{\underline{d}}x} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

so daß sie dann geben, mit dx wegmultiplizirend,

$$5)\quad d(f) \text{ oder } \underline{\underline{d}}f = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy$$

6) $d(\mathfrak{f})$ oder $d\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{f}}{dx} \cdot dx + \frac{d\mathfrak{f}}{dy} \cdot dy + \frac{d\mathfrak{f}}{dz} \cdot dz$;

unter $d(\mathfrak{f})$ wie unter $d\mathfrak{f}$ zur Linken, das vollständige Differenzial verstanden.

Anmerkung. Sind aber in $\mathfrak{f}_{x,y,z,..}$, die Veränderlichen x, y, z rc. von einander ganz unabhängig, so hat die Ableitungsrechnung nichts hinzustellen, was mit dem Differenzial $d\mathfrak{f}$ verglichen werden könnte, außer dem, was sich für die Bestimmung der Zuwachse (§. 32.) niedergelegt findet, und woraus wir gerade die Zuwachse $d\mathfrak{f}$ der (§. 45. §. 48.) abgeleitet haben.

§. 51. Zusatz.

So wie übrigens die Formeln des (§. 41. A und B.) die Gesetze enthielten, nach denen systematisch jede Ableitung gefunden werden kann, sobald die Ableitungen der einfachsten Funktionen bekannt sind, so enthalten die hiesigen analogen Sätze der Differenzialrechnung das Mittel, die Differenzialien einer jeden Funktion eines und mehrer Veränderlichen sogleich aufzufinden, wenn die Differenzialien der einfachsten Funktionen bekannt sind. — Ja die Ableitungen einer Funktion φ eines Veränderlichen x oder mehrer Veränderlichen x, y, z, welche nach (§. 41.) unter der Voraussetzung gefunden sind, daß x, y, z, rc. wiederum Funktionen von v vorstellen, sind selbst genau die Differenzialien derselben Funktion φ, sobald man nur statt der Ableitungszeichen (∂) nach v, die Differenzialzeichen (d) setzt, alles übrige aber durchaus unverändert läßt.

Und namentlich gelten die Sätze des (§. 36.) und deren wörtlicher Ausdruck unverändert auch hier, wenn man nur statt der (runden) ∂, in so ferne sich solche auf v beziehen, (gerade) d, und statt des Wortes „Ableitung", jetzt das Wort „Differenzial" setzt.

Ist nämlich φ eine bloße Funktion von x, so hat man, nach allem v genommen,

$$\partial\varphi = \partial\varphi_x \cdot \partial x;$$

und setzt man hier statt der (∂) nach v, jetzt (d), so erhält man

$$d\varphi = \partial\varphi_x \cdot dx,$$

welches nach (§. 19.) eine richtige Differenzialformel ist, während man noch statt der Ableitung $\partial\varphi_x$ auch den Differenzialquotienten $\frac{d\varphi}{dx}$ setzen kann.

Und ist φ eine Funktion von x und y, so hat man nach allem v,

$$\partial\varphi = \partial\varphi_x \cdot \partial x + \partial\varphi_y \cdot \partial y;$$

und verwandelt man hier die (∂) nach v, in (d), so wird hieraus

$$d\varphi = \partial\varphi_x \cdot dx + \partial\varphi_y \cdot dy,$$

welches nach (§. 45.) eine richtige Differenzialformel ist, wo auch noch $\frac{d\varphi}{dx}$ statt $\partial\varphi_x$, und $\frac{d\varphi}{dy}$ statt $\partial\varphi_y$ gesetzt werden kann.

Ist ferner φ eine Funktion von x, y, z, so ist nach allem v

$$\partial\varphi = \partial\varphi_x \cdot \partial x + \partial\varphi_y \cdot \partial y + \partial\varphi_z \cdot \partial z,$$

und (d), statt (∂) nach v gesetzt:

$$d\varphi = \partial\varphi_x \cdot dx + \partial\varphi_y \cdot dy + \partial\varphi_z \cdot dz,$$

welche Differenzialformel nach (§. 45.) richtig ist.

U. s. w. f.

Anmerkung. Bei der Vergleichung der Differenzialformeln mit denen der Ableitungsrechnung müssen wir aber wiederholt auf folgende Umstände aufmerksam machen:

1) Obgleich diese Formeln der Ableitungsrechnung und der Differenzialrechnung der Form nach so sehr übereinstimmen, so sind sie dem Wesen und ihrer Bedeutung nach doch sehr von einander verschieden.

2) Die nächste Verschiedenheit liegt darin, daß die Ableitungen nie im Moment des Verschwindens, sondern wiederum (endliche) Funktionen derselben Veränderlichen sind, von denen die gegebene φ selbst Funktion ist; während die Differenzialien allemal im Moment des Verschwindens befindliche Zuwachse sind, und der Quozient zweier Differenzialien erst die Ableitung gibt.

3) Ist jedoch φ eine Funktion von x allein, oder ist φ eine Funktion mehrer Veränderlichen x, y, z, rc., von denen die einzelnen alle wiederum Funktionen eines neuen Veränderlichen v sind (der jedoch auch = x werden kann), so geht $\partial\varphi$ (nach v) sogleich in $d\varphi$ über, und auch umgekehrt $d\varphi$ in $\partial\varphi$; weil dann allemal

$$d\varphi = \partial\varphi \cdot dv, \quad \text{also} \quad \frac{d\varphi}{dv} = \partial\varphi$$

ist, so daß dann die Ableitungsformeln und die Differenzialformeln zwar noch immer den in (N. 2.) beschriebenen wesentlichen Unterschied aufweisen, aber in einander übergehen, dadurch, daß man erstere mit dv multiplizirt, oder letztere durch dv dividirt.

4) Ist endlich φ eine Funktion mehrer Veränderlichen x, y, z, rc., welche nicht wiederum Funktionen von v sind, sondern von einander ganz unabhängig, so finden zwar die Differenzialformeln für $d\varphi$ noch gerade so statt, wie vorher, wo x, y, z, rc. noch Funktionen von v waren, nicht aber die Ableitungsformeln; und will man ohne Differenzialrechnung, bloß mittelst der Ableitungsrechnung, zu den für $\varkappa$ im Moment des Verschwindens genommenen Zuwachsen $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa \cdot \delta z$, rc. den Zuwachs von φ finden, so wählt man das (§. 32.) beschriebene und ausgeführte Mittel, woraus wir gerade die letztern Sätze der Differenzialrechnung abgeleitet haben. — Und der Vfr. wagt zu behaupten, daß hier die Anwendung der Ableitungsrechnung, der der Differenzialrechnung in den meisten Fällen als bequemer, in allen aber als evidenter vorzuziehen ist.

§. 52. Zusatz.

Obgleich in dem (so eben erwähnten) Falle, daß φ eine Funktion von mehren von einander ganz unabhängigen Veränderlichen ist, die den Differenzialformeln entsprechenden Formeln der Ableitungsrechnung nie gebraucht werden, so hat doch Lagrange das Mittel angegeben, durch welches auch in diesem Falle die vorliegenden Formeln der Ableitungsrechnung mit denen der Differenzialrechnung, als in einander übergehend angesehen werden können, und zwar genau so, wie in dem vorhergehenden Fall, wo x, y, z, rc. noch Funktionen eines und desselben v waren.

Es denkt sich nämlich Lagrange in diesem Falle, wo $\varphi_{x,y,z,etc.}$ gegeben, und x, y, z, rc. von einander unabhängig sind, diese x, y, z, rc. doch noch als Funktionen von v, aber als völlig allgemeine, unbestimmte, gestaltlose, jede mögliche Form annehmende, also durchaus keine bestimmte Abhängigkeit festsetzende, mit einem Worte solche, welche auf ihre Ableitungen ∂x, ∂y, ∂z, rc. nach v, die Wirkung äußern, daß diese wiederum völlig von einander unabhängig sind.

Wir werden in der Folge zuweilen von dieser Ansicht Gebrauch machen, um die Leichtigkeit, welche sie in der Anwenduug gewährt, bemerklich zu machen, jedoch diesen Gebrauch jedesmal nur dann erst statt finden lassen, wenn wir vorher, ohne diese Ansicht zu Hilfe zu nehmen, die Untersuchung beendigt haben.

Anmerkung. Schließlich machen wir den Anfänger wiederholt darauf aufmerksam, daß die Differenzialrechnung durchaus nicht nothwendig und nur zuweilen, (entweder um schnell, aus dem Gedächtniß verloren gegangene Formeln wiederum zu ersetzen, oder um Untersuchungen, dadurch daß sie weniger anschaulich gründlich geführt werden, abzukürzen) bequem ist; und daß es daher besser seyn dürfte, anfänglich alles, die Differenzialien betreffende zu überschlagen, um nur die Ableitungsrechnung recht tüchtig und recht gründlich kennen zu lernen.

§. 53. Lehrsatz.

Wenn aus $\varphi_{x,y,z,\text{etc.}}$ gefunden sind die Differenzialquotienten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, 2c. d. h. die Ableitungen $\partial\varphi_x$, $\partial\varphi_y$, $\partial\varphi_z$, 2c. so sind diese allemal wiederum (im allgemeinen) Funktionen von x, y, z, 2c., wie φ selbst. Man kann daher von ihnen wiederum die Differenzialien suchen, also auch die Differenzialquozienten

$$\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx},\quad \frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dy},\quad \frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dz}\quad \text{2c.}$$

$$\frac{d\frac{d\varphi}{dy}}{dx},\quad \frac{d\frac{d\varphi}{dy}}{dy},\quad \frac{d\frac{d\varphi}{dy}}{dz},\quad \text{2c. 2c.}$$

u. s. w. f. — Letztere werden jedoch kürzer bezeichnet beziehlich durch

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2},\quad \frac{d^2\varphi}{dx\cdot dy},\quad \frac{d^2\varphi}{dx\cdot dz},\quad \text{2c. 2c.,}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy\cdot dx},\quad \frac{d^2\varphi}{dy^2},\quad \frac{d^2\varphi}{dy\cdot dz},\quad \text{2c. 2c.}$$

Ueberhaupt bezeichnet man in der Differenzialrechnung durch

$$\frac{d^{a+b+c}\varphi}{dx^a \cdot dy^b \cdot dz^c}$$

dasselbe, was in der Ableitungsrechnung durch

$$\partial^{a,b,c}\varphi_{x,y,z}$$

bezeichnet worden ist; und weil mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes erwiesen worden ist, daß es einerlei ist, in welcher Ordnung diese Ableitungen genommen werden (nach §. 28. §. 30.), so ist es auch hier einerlei, in welcher Ordnung diese Differenziirungen genommen sind, wenn nur vorausgesetzt wird, daß dx, dy, dz, 2c. von x, y, z, 2c. unabhängig sind, d. h. bei dem Differenziiren nach x, nach y, oder nach z, 2c. als konstant angesehen werden können oder sollen.

§. 54. Zusatz.

Der Taylor'sche Lehrsatz für 2 und mehr Veränderliche nimmt dann in Differenzialzeichen folgende Gestalt an:

1) $$f_{x+\Delta x, y+\Delta y} = S\left[\frac{d^{a+b}f}{dx^a \cdot dy^b} \cdot \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b}{a!\ b!}\right]$$

$$\text{oder} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!}\ \frac{d^{a+b}f}{dx^a \cdot dy^b}\ \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b}{c!}\right]_{a+b=c};$$

2) $$f_{x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z} = S\left[\frac{d^{a+b+c}f}{dx^a \cdot dy^b \cdot dz^c} \cdot \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b \cdot \Delta z^c}{a!\ b!\ c!}\right]$$

$$\text{oder} = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!}\ \frac{d^{a+b+c}f}{dx^a \cdot dy^b \cdot dz^c} \cdot \frac{\Delta x^a \cdot \Delta y^b \cdot \Delta z^c}{d!}\right]_{a+b+c=d};$$

u. s. w. f. für Funktionen von noch mehr Veränderlichen.

In diesen Gleichungen kann nun wiederum $\Delta x = \varkappa \cdot \delta x$, $\Delta y = \varkappa \cdot \delta y$, $\Delta z = \varkappa \cdot \delta z$, 2c. gesetzt werden, damit die Reihe zur Rechten jedesmal eine, nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende werde, wie solches (§. 32.) geschehen ist.

Und in denselben Gleichungen kann man zuerst a, b, c, 2c. statt x, y, z, ..., dann aber x—a, y—b, z—c, statt

Δx, Δy, Δz setzen, und man erhält dann den Maclaurin'schen Lehrsatz, für zwei und mehr Veränderliche, wie solcher bereits (§. 31.) zu finden ist, nur daß die dortigen Ableitungszeichen hier durch Differenzialzeichen ersetzt werden, wodurch jedoch die Sätze selbst durchaus unverändert bleiben.

Setzt man aber in dem Taylor'schen Lehrsatze (N. 1. Nr. 2.) $\varkappa \cdot \delta x$, $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa \cdot \delta z$, ꝛc. statt Δx, Δy, Δz, ꝛc., so erhält man noch in Differenzialzeichen ausgedrückt

$$3)\ f_{x+\varkappa\cdot\delta x,\,y+\varkappa\cdot\delta y} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\cdot\frac{d^{a+b}f}{dx^a\cdot dy^b}\cdot\delta x^a\cdot\delta y^b\cdot\frac{\varkappa^c}{c!}\right]_{a+b=c};$$

$$4)\ f_{x+\varkappa\cdot\delta x,\,y+\varkappa\cdot\delta y,\,z+\varkappa\cdot\delta z}$$

$$= S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}\cdot\frac{d^{a+b+c}f}{dx^a\cdot dy^b\cdot dz^c}\cdot\delta x^a\cdot\delta y^b\cdot\delta z^c\cdot\frac{\varkappa^d}{d!}\right]_{a+b+c=d};$$

u. s. w. f.

wo $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$, $\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$ die Koeffizienten sind von $(a+b)^{a+b}$, und von $(a+b+c)^{a+b+c}$, wenn diese Potenzen nach dem binomischen oder trinomischen u. s. w. Lehrsatze, entwickelt erscheinen; wo man jedoch nicht vergessen muß, daß nur dann, wenn x, y, z, ꝛc. von einander ganz unabhängig sind, auch δx, δy, δz, ꝛc. von einander ganz unabhängig bleiben; daß aber, wenn y, z, ꝛc. von x, oder z, ꝛc. von x und y abhängen, dann dem (§. 44.) zufolge, im erstern Falle δy, δz, ꝛc. von δx, im andern Falle δz, ꝛc. von δx, δy, u. s. w. f. abhängen werden, und zwar dergestalt, daß diese abhängigen δz, ꝛc. selber wieder als Reihen erscheinen, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen, welche jedoch mit einem ersten Gliede anfangen, das kein $\varkappa$ hat.

Sollen daher in den Ausdrücken zur Rechten in (N. N. 3. und 4.) die Glieder wirklich bereits nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ geordnet seyn, so muß man x, y, z, ꝛc. von einander ganz unabhängig voraussetzen, damit das $\varkappa$ in δy, δz, ꝛc. ꝛc. selbst nicht mehr vorkomme.

§. 55. Erklärung und Folgerung.

Für den Fall jedoch, daß f eine Funktion von x, y, oder von x, y, z, etc. ist, dabei aber x, y, z, etc. von einander ganz unabhängig sind, existirt in der Differenzialrechnung auch der Begriff des **2ten und höhern vollständigen Differenzials**, dessen Analogen die Ableitungsrechnung eigentlich nicht hat und auch nicht braucht; in so ferne sich letztere bloß an die (N. N. 3. 4. des §. 54.) oder vielmehr an denselben Satz aber in der Form des (§. 32.) hält, wo für den Fall, daß $\varkappa$ im Moment des Verschwindens genommen wird, der ganze Zuwachs Δf allemal nach Potenzen von $\varkappa$ geordnet ist, so daß in den Anwendungen statt desselben Δf sogleich seine bedeutendsten Glieder, eines nach dem andern, gesetzt werden können, in so ferne jedes folgende Glied $Q \cdot \varkappa^{n+1}$ gegen das vorhergehende $P \cdot \varkappa^n$ im Moment des Verschwindens ist.

Ist nämlich f eine Funktion von x und y und läßt man x um dx, y um dy wachsen, so daß dx, dy, eben so wie x und y unabhängig von einander, erstere aber im Moment des Verschwindens sind, so erhält man nach (§§. 45—48.)

$$df = \partial f_x \cdot dx + \partial f_y \cdot dy$$

oder

$$1) \quad df = \frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy,$$

sobald dx von der Form $\varkappa \cdot \delta x$, dy von der Form $\varkappa \cdot \delta y$, $\varkappa$ selbst im Moment des Verschwindens, δx, δy beliebig groß und von einander unabhängig gedacht sind, und wenn unter df der, dann den Faktor $\varkappa$, aber nicht $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, etc. enthaltende Theil des dadurch verursachten und nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt gedachten Zuwachses Δf verstanden, und solches df das vollständige Differenzial von f genannt wird; alles den (§§. 45—48.) gemäß.

Versteht man nun unter **zweitem vollständigen Differenzial** d^2f, den bedeutendsten Theil vom Zuwachse $\Delta(df)$ d. h. den Theil von $\Delta\left(\frac{df}{dx} \cdot dx + \frac{df}{dy} \cdot dy\right)$ welcher mit $\varkappa^2$, aber

nicht mit höhern Potenzen von $\varkappa$ multiplizirt seyn wird, sobald in $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$, als Funktionen von x und y, letztere wieder um dasselbe dx und dy wachsend gedacht werden, während aber dx und dy selbst dadurch unverändert (konstant) bleiben, so findet sich sogleich

$$d^2f = d\left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dx + d\left(\frac{df}{dy}\right)\cdot dy,$$

während nach (1.) selbst

$$d\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx + \frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dy$$

und

$$d\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dx + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy$$

seyn wird, so daß man erhält:

$$2)\quad d^2f = \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dx\cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2.$$

Und versteht man unter dem dritten vollständigen Differenzial d^3f, den bedeutendsten Theil des Zuwachses $\Delta(d^2f)$, welcher mit $\varkappa^3$ aber mit keiner höhern Potenz von $\varkappa$ multiplizirt ist, unter der Voraussetzung, daß $\Delta(d^2f)$ dadurch erhalten wird, daß in den Funktionen $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx\cdot dy}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ (die identisch sind beziehlich mit den Ableitungen $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$) wiederum x und y um dieselben dx und dy wachsen, so ist leicht zu erhalten

$$d^3f = d\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\cdot dx + 2d\left(\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\right)\cdot dx\, dy + d\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)\cdot dy^2,$$

also

$$3)\quad d^3f = \frac{d^3f}{dx^3}\cdot dx^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}\cdot dx^2\cdot dy$$
$$+ 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\cdot dx\cdot dy^2 + \frac{d^3f}{dy^3}\cdot dy^3.$$

Und wenn man diese Definitionen und Zeichen der Analogie nach erweitert und verallgemeinert, so erhält man

$$4)\quad d^m f = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\cdot\frac{d^{a+b}f}{dx^a\cdot dy^b}\cdot dx^a\cdot dy^b\right]_{a+b=m},$$

wo $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$ der Binomial-Koeffizient ist, der einzelnen Glieder der Potenz $(a+b)^m$ *).

§. 56. Zusatz.

Auf dieselbe Weise würde man, wenn f eine Funktion von 3 von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z ist, und der Begriff des **vollständigen** 1sten, 2ten, 3ten, mten Differenzials analog erweitert gedacht wird, leicht finden

$$1)\quad df = \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy + \frac{df}{dz}\cdot dz,$$

$$2)\quad d^2f = \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dx\cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2$$
$$+ \frac{d^2f}{dx\cdot dz}\cdot dx\cdot dz + 2\frac{d^2f}{dy\cdot dz}\cdot dy\cdot dz + \frac{\partial^2 f}{dz^2}\cdot dz^2,$$

und sogleich allgemein

$$3)\quad d^m f = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}\cdot\frac{d^{a+b+c}f}{dx^a\cdot dy^b\cdot dz^c}\cdot dx^a\cdot dy^b\cdot dz^c\right]_{a+b+c=m},$$

wo $\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$ der Koeffizient der einzelnen Glieder von $(a+b+c)^m$ ist.

---

*) Setzt man voraus, daß für eine einzige bestimmte Zahl μ statt m, die Formel (4.) statt findet, so kann man aus $d^\mu f$ leicht $d(d^\mu f)$ d. h. $d^{\mu+1}f$ ableiten; und da man dann dieselbe Form (4.) noch einmal erhält, nur $\mu+1$ statt m gesetzt, so folgt, daß die Formel (4.) allemal für den nächstfolgenden Werth von m gilt, so oft sie für irgend einen wahr ist. Da sie nun für m = 2 zutrifft, so gilt sie offenbar für jede ganze Zahl, welche statt m gesetzt werden kann.

Und ist f eine Funktion von beliebig viel Veränderlichen x, y, z, u, ꝛc., die alle von einander unabhängig sind, so lassen sich leicht ähnliche Erklärungen, ähnliche Zeichen, und ähnliche Formeln finden, für $d^m f$, welche in ihren Koeffizienten mit denen der Potenzen $(a+b+c+d)^m$, $(a+b+c+d+e)^m$, u. s. w. f. übereinstimmen würden.

§. 57. Zusatz.

Vergleicht man diese Resultate mit den (N. N. 3. 4. des §. 54.) so findet man leicht, weil

$$\delta x^a \cdot \delta y^b \cdot \varkappa^{a+b} = (\varkappa \cdot \delta x)^a \cdot (\varkappa \cdot \delta y)^b = dx^a \cdot dy^b,$$

und eben so $\delta x^a \cdot \delta y^b \cdot \delta z^c \cdot \varkappa^{a+b+c} = dx^a \cdot dy^b \cdot dz^c$ ist, daß diese (N. N. 3. 4. des §. 54.) jetzt in folgende Formeln übergehen

$$1)\quad f_{x+dx,y+dy} = S\left[\frac{d^c f}{c!}\right] = f + df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \frac{d^4 f}{4!} + \cdots$$

$$2)\quad f_{x+dx,y+dy,z+dz}$$

$$= S\left[\frac{d^c f}{c!}\right] = f + df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \frac{d^4 f}{4!} + \cdots$$

während früher (§. 24.) für den Fall daß f eine bloße Funktion vou x ist, ebenfalls schon gefunden worden war

$$f_{x+dx} = S\left[\frac{d^c f}{c!}\right] = f + df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \frac{d^4 f}{4!} + \cdots.$$

Wenn daher, es mag f eine Funktion eines einzigen Veränderlichen x, oder zweier oder mehrer von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, z, ꝛc. seyn, unter Δf der Zuwachs verstanden wird, welchen f dadurch erleidet, daß jeder in ihm vorkommende Veränderliche x, y, ꝛc. um dx, dy, ꝛc. wächst, so hat man allemal nur die einzige Formel

$$\odot)\quad \Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \frac{d^4 f}{4!} + \cdots$$

wo df, $d^2 f$, $d^3 f$, $d^4 f$, ꝛc.
beziehlich mit $\varkappa$, $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, $\varkappa^4$, ꝛc.
vergleichbar sind, $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht.

Und die Differenzialrechnung, welche sich erlaubt, alle höheren Potenzen eines im Moment des Verschwindens befindlichen $\varkappa$, gegen niedrigere außer Acht zu lassen (§. 19.), wird bloß

$$\Delta f = df, \quad \Delta(df) = d^2 f, \quad \Delta(d^2 f) = d^3 f,$$

u. s. w. f. nehmen.*)

Anmerkung. Später werden wir, aus dem Gesichtspunkte der Ableitungsrechnung, bei Gelegenheit der sogenannten Variationsrechnung, durch einige allgemeine Betrachtungen sowohl diese, als auch die noch folgenden Lehren der Differenzialrechnung, unter einem und demselben Gesichtspunkte ansehen, und dadurch in das Ganze der Differenzialrechnung noch mehr Einheit bringen, so wie auf ihre Eigenthümlichkeit das helleste Licht werfen können.

---

*) Erlaubte man sich in der Formel (⊙) statt Δf, weil solches hier ein im Moment des Verschwindens befindlicher Zuwachs ist, wie wir in solchen Fällen in der Differenzialrechnung immer thun, bloß df zu setzen, so würde sie die Form annehmen

$$df = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \cdots$$

welche Gleichung den (§. 19.) bemerkten Widerspruch ausdrückt, aber nicht unrichtig ist, wenn man nur, was in der sich widersprechenden Definition des Differenzials liegt, und in dieser Beziehung verstattet seyn muß, unter dem df zur Linken, den ganzen, alle Potenzen von $\varkappa$ enthaltenden Zuwachs versteht, unter df zur Rechten dagegen nur den Theil dieses Zuwachses, der mit $\varkappa^1$ (aber nicht mehr mit $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, ꝛc.) vergleichbar ist, $\varkappa$ wie hier immer, im Moment des Verschwindens gedacht.

Höhere Zahlenlehre.

Drittes Kapitel.

Bestimmung der Abhängigkeit der Ableitungen von einander, wenn die Veränderlichen selbst auf eine bestimmte Weise von einander abhängen. — Anwendungen dieser Beziehungen zwischen den Ableitungen zur Auffindung der Ableitungen (und der Differenzialien) von verwikkelt (durch Gleichungen) gegebenen Funktionen, so wie auch zur „Uebertragung der Unabhängigkeit."

Vorerinnerung.

Wenn in den beiden vorhergehenden Kapiteln die Wahrheit erkannt ist, 1) daß die Ableitungen und die Differenzialquotienten oder Differenzialkoeffizienten völlig identisch sind, daß also

$$\partial y_x = \frac{dy}{dx}, \quad \partial^2 y_x = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \partial^3 y_x = \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ ꝛc. ꝛc.};$$

daß mithin 2) die einen in die andern unmittelbar umgeschrieben werden können, — so folgt von selber, daß von nun an die zusammengesetztern Untersuchungen immer genau dieselben bleiben werden, man mag sie in der Form der Ableitungsrechnung oder in der Form der Differenzialrechnung anstellen, oder die Methode der Grenzen zum Grunde gelegt sich denken.

Wenn daher in diesem Kapitel in der dritten Abtheilung noch einmal von der Form gesprochen wird, wie die Differenzialrechnung dieselben Lehren zu geben pflegt, so geschieht dies dasmal nur sehr kurz,

und nur in der Absicht, dem Anfänger das Lesen anderer Schriften über denselben Gegenstand, oder über dessen Anwendungen, leicht und bequem zu machen.

Was wird aber Gegenstand der beiden erstern Abtheilungen dieses Kapitels seyn müssen? — Im erstern Kapitel haben wir gezeigt, daß der Taylor'sche Lehrsatz Endzweck der gesammten (Differenzial-) Ableitungs-Rechnung ist. Seine Koeffizienten sind es, welche unter dem Namen der Ableitungen (Differenzialquotienten, Differenzialkoeffizienten) einer nähern Betrachtung unterworfen werden. Er selber ist es, der alle Anwendungen dieser Rechnungen in sich schließt. — Wenn nun aber zwischen mehren Veränderlichen z, y, x, v, u, ꝛc. ꝛc., Abhängigkeiten statt finden (die immer durch Gleichungen ausgedrückt gedacht sind), so finden dieselben Abhängigkeiten statt, zwischen den neuen Werthen von z, y, x, v, u, ꝛc. ꝛc., — welche man gewöhnlich bequem durch $z+\Delta z$, $y+\Delta y$, $x+\Delta x$, $v+\Delta v$, $u+\Delta u$, ꝛc. ꝛc., ausdrückt, folglich auch Abhängigkeiten (Gleichungen) statt zwischen Δz, Δy, Δx, Δv, Δu, ꝛc. ꝛc., d. h. zwischen den verschiedenen Taylor'schen Reihen, welche für diese Zuwachse Δz, Δy, Δx, Δv, Δu, ꝛc. ꝛc. (für einige oder für alle derselben) gesetzt werden; und diese Gleichungen zwischen unendlichen Reihen, wenn letztere so umgeformt werden, daß alle nach einem und demselben Fortschreitungsbuchstaben h fortlaufen, führen dann wieder zu Gleichungen zwischen den einzelnen Koeffizienten von h^1, h^2, h^3, h^4, ꝛc. ꝛc. ꝛc.; d. h. zu Gleichungen zwischen den Ableitungen ∂z, ∂y, ∂x, ∂u, ∂v, ꝛc. ꝛc. $\partial^2 z$, $\partial^2 y$, $\partial^2 x$, $\partial^2 u$, $\partial^2 v$, ꝛc. ꝛc., $\partial^3 z$, $\partial^3 y$, $\partial^3 x$, $\partial^3 u$, $\partial^3 v$, ꝛc. ꝛc., oder zwischen noch höheren Ableitungen (und dann auch zwischen den Differenzialien).

Von diesen Gleichungen zwischen den Ableitungen solcher Veränderlichen, die selber wieder unter sich in einer gegebenen Verbindung stehen, haben wir nun in dem 2ten Kapitel bereits (von §. 34 — §. 40.) einige aufgestellt, jedoch nur wenige und diese wiederum nur in der Absicht, um uns dieser Eigenschaften (dieses Zusammenhanges) der Ableitungen bedienen zu können, den Hauptzweck des 2ten Kapitels systematisch bequem zu erreichen, nämlich die Ableitungen einer jeden entwickelt gegebenen Funktion von x, in die Ableitungen ihrer einfachern Bestandtheile, u. s. f., auszudrücken, also zuletzt solche als die gesuchte Funktion von x selbst wirklich herzustellen, d. h. mit andern Worten, das praktische Differenziiren entwickelt gegebener Funktionen möglichst bequem und vollkommen sicher zu machen.

Wovon aber auf diese Weise bloß der Anfang gegeben ist, und nur

vorläufig, um einen speziellen Zweck damit erreichen zu können, das muß in diesem gegenwärtigen Kapitel noch weiter ausgeführt und auf einen solchen Umfang ausgedehnt werden, daß man einerseits in den Stand gesetzt sich sieht, dergleichen Untersuchungen nach Belieben selbstthätig weiter fortsetzen, oder auch gegebenen Zwecken gemäß durchführen zu können; andererseits aber auch, um sogleich wirklich einige besondere Zwecke damit zu verfolgen. Diese letztern Zwecke sind 1) die Abhängigkeit der Ableitungen von einander zu benutzen, um die Ableitungen verwickelt gegebener Funktionen bestimmen zu können, ohne gerade diese letztern in entwickelter Form vorher herstellen zu müssen, 2) Funktionen (Zusammensetzungen) aus Ableitungen (z. B. Funktionen aus ∂y_x, $\partial^2 y_x$, rc. rc. und beliebig andern Ausdrücken zusammengesetzt) in andere gleiche Funktionen zu verwandeln, welche diese Ableitungen (z. B. ∂y_x, $\partial^2 y_x$, rc. rc.) nicht mehr, sondern dafür andere, von diesen abhängige Ableitungen (z. B. ∂x_y, $\partial^2 x_y$, rc. rc., oder ∂x_v, ∂y_v, $\partial^2 x_v$, $\partial^2 y_v$, rc. rc.) enthalten. — Diese letztere Aufgabe ist es aber, welche man in der Differenzialrechnung gewöhnlich das „Uebertragen der Unabhängigkeit" nennt, wie solches im Verlaufe des Vortrags näher erklärt sich finden wird.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Ableitungsformeln. Auffindung der Ableitungen der verwickelt gegebenen Funktionen. Uebertragung der Unabhängigkeit.

---

§. 58. Aufgabe.

Es ist f eine Funktion von x, und x wieder eine Funktion von v. Man soll die Ableitungen $\partial f_{(v)}$, $\partial^2 f_{(v)}$, $\partial^3 f_{(v)}$, rc. in solche nach x, und in Ableitungen von x nach v, ausdrücken.

Auflösung.

Man hat zuerst nach (§. 34. I.)

$$\text{I.}\quad \partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v \quad \text{oder} \quad \partial f = \partial f_x \cdot \partial x,$$

wenn ∂f, ∂x, nach allem v genommen gedacht werden. — Um nun hieraus $\partial^2 f$ nach allem v zu finden, so bedenke man,

daß ∂f_x, wie f selbst, eine unmittelbare Funktion von x, also eine mittelbare Funktion von v ist, während ∂x, so wie x, als eine unmittelbare Funktion von v angesehen werden muß. — Nun ist aber nach (§. 36. N. 2.)

$$\partial(\partial f) = \partial(\partial f_x) \cdot \partial x + \partial f_x \cdot \partial(\partial x),$$

während $\partial(\partial f_x) = \partial(\partial f_x)_x \cdot \partial x$ seyn muß nach (§. 34. I.), wenn nur die nicht näher bezeichneten Ableitungen ∂, nach allem v gedacht sind. — Also findet sich

II. $\partial^2 f = \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x$.

Nimmt man hier wiederum links und rechts die Ableitungen nach allem v, und bedenkt man, daß $\partial^2 f_x$, ∂f_x und f selbst, explizite Funktionen von x, und implizite Funktionen von v sind, daß aber ∂x, $\partial^2 x$, so wie x als Funktionen von v angesehen werden müssen, also daß man hat

$$\partial(\partial^2 f_x) = \partial^3 f_x \cdot \partial x,$$

$$\partial(\partial x^2) = 2\partial x \cdot \partial^2 x,$$

$$\partial(\partial^2 x) = \partial^3 x;$$

so findet sich

III. $\partial^3 f = \partial^3 f_x \cdot \partial x^3 + 3\partial^2 f_x \cdot \partial x \cdot \partial^2 x + \partial f_x \cdot \partial^3 x$.

Auf dieselbe Weise fortfahrend findet man aber auch noch $\partial^4 f$, $\partial^5 f$, u. s. w. in der verlangten Form ausgedrückt.

Anmerkung. Wird $v = x$, so wird $\partial x = 1$, $\partial^2 x = \partial^3 x =$ 2c. $= 0$, und die Formeln (I. II. III.) reduziren sich auf

I. $\partial f = \partial f_x$,

II. $\partial^2 f = \partial^2 f_x$,

III. $\partial^3 f = \partial^3 f_x$,

welche, wie man sieht, richtige (identische) Gleichungen sind, aber nichts sagende, in soferne die nicht näher bezeichneten Ableitungen ∂ zur Linken jetzt nach allem x genommen sind, also natürlich dieselben, welche zur Rechten, aber näher bezeichnet, stehen.

§. 59. Zusatz.

Umgekehrt dienen die Gleichungen (I. II. III. 2c. des §. 58.) auch dazu, um die Ableitungen von f nach x, in Ableitungen

von f und x nach einem dritten Veränderlichen v auszudrücken, in so ferne man die angeführten Gleichungen nur nach ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. algebraisch auflösen darf. — Man erhält dann

$$\text{I.}\quad \partial f_x = \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$\text{II.}\quad \partial^2 f_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x}{\partial x^3};$$

$$\text{III.}\quad \partial^3 f_x = \frac{\partial x^2 \cdot \partial^3 f - 3\partial x \cdot \partial^2 x \cdot \partial^2 f + 3\partial f \cdot \partial^2 x^2 - \partial x \cdot \partial f \cdot \partial^3 x}{\partial x^5};$$

u. s. w. f.; wo rechts alle Ableitungen nach v genommen sind.

§. 60. Zusatz.

Wird v = f genommen, so daß x als Funktion von f angesehen wird (was allemal erlaubt ist, in so ferne f anfänglich als Funktion von x gedacht worden ist), so verwandeln sich die Gleichungen (I. II. III. des §. 58.), weil $\partial f = 1$, $\partial^2 f = 0 = \partial^3 f =$ ꝛc. *) wird, so oft die Ableitungen ∂ ohne Beisatz nach f selbst genommen werden, in

---

*) Es bedeutet nämlich f eine Funktion von x, welche selbst durch f_x vorgestellt ist, so daß in der Gleichung

$$1)\quad f = f_x$$

zur Linken der Buchstabe f, zur Rechten aber f nicht, sondern bloß ein Ausdruck mit x vorkommt. Löst man nun diese Gleichung (1.) algebraisch nach x auf, so daß man erhält

$$2)\quad x = x_f,$$

wo zur Linken der Buchstabe x, rechts aber x nicht, sondern nur ein, f enthaltender Ausdruck (der durch x_f vorgestellt ist) vorkommt, so kann man diesen Werth x_f statt x in (1.) substituiren, und solche muß dann in eine vollkommen identische Gleichung übergehen, also in

$$3)\quad f = f.$$

Es ist daher f_x diejenige Funktion von x, welche, wenn statt x wiederum x_f aus (2.) gesetzt wird, bloß in den Buchstaben f übergeht.

1) $1 = \partial f_x \cdot \partial x$;

2) $0 = \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x$;

3) $0 = \partial^3 f_x \cdot \partial x^3 + 3\partial^2 f_x \cdot \partial x \cdot \partial^2 x + \partial f_x \cdot \partial^3 x$;

u. s. w. f., wo alle ∂ ohne Beisatz sich auf f beziehen.

Die Gleichungen des (§. 59.) dagegen gehen für $v = f$ über in

4) $\partial f_x = \frac{1}{\partial x}$;

5) $\partial^2 f_x = -\frac{\partial^2 x}{\partial x^3}$;

6) $\partial^3 f_x = \frac{3 \cdot \partial^2 x^2 - \partial x \cdot \partial^3 x}{\partial x^5}$;

u. s. w. f.; rechts lauter Ableitungen nach f, so wie unter x die Funktion x_f verstanden, welche aus der Gleichung $f = f_x$, wie sie ursprünglich f als eine Funktion von x gibt, durch Auflösung derselben nach x, für x hervorgeht.

Und diese Gleichungen (1—6.), von denen (4—6.) auch durch bloße algebraische Auflösung der (1—3.) nach ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ꝛc. ꝛc. erhalten werden, sprechen die Abhängigkeit und die Beziehungen aus, in denen die Ableitungen von f_x nach x, zu den Ableitungen von x_f nach f stehen.

Man konnte aber auch die Gleichungen (1—3.) nach ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ꝛc. ꝛc. algebraisch auflösen, und erhielt dann

7) $\partial x = \frac{1}{\partial f_x}$;

8) $\partial^2 x = -\frac{\partial^2 f_x}{\partial f_x{}^3}$;

9) $\partial^3 x = \frac{3 \cdot \partial^2 f_x{}^2 - \partial f_x \cdot \partial^3 f_x}{\partial x^5}$;

Dieser bloße Buchstabe f aber, welcher aus f_x wird, wenn x wiederum in x_f übergeht, ist die Funktion $f_{(f)}$, deren Ableitungen nach allem f zu nehmen sind; daher ist $\partial f_{(f)} = 1$, $\partial^2 f_{(f)} = 0$ ꝛc. ꝛc.

u. s. w. f.; wo ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ꝛc. ꝛc. statt ∂x_f, $\partial^2 x_f$, $\partial^3 x_f$, ꝛc. stehen.

Diese Formeln (7—9.) hätte man aber auch aus (4—6.) erhalten, wenn man in letzteren bloß durchgehends f und x mit einander vertauscht hätte, was man auch a priori hätte erschließen können, weil eben so gut als f eine Funktion von x ist, auch x eine Funktion von f seyn muß, also hierin beide, f und x, mit einander vertauscht werden können.

Anmerkung 1. Es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$1)\ f_{x+\Delta x} = f_x + \partial f_x \cdot \Delta x + \partial^2 f_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

also

$$2)\ \Delta f = \partial f_x . \Delta x + \partial^2 f_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots ;$$

Aber eben so ist nach demselben Satze

$$3)\ x_{f+\Delta f} = x_f + \partial x_f \cdot \Delta f + \partial^2 x_f \cdot \frac{\Delta f^2}{2!} + \partial^3 x_f \cdot \frac{\Delta f^3}{3!} + \cdots ;$$

folglich

$$4)\ \Delta x = \partial x_f \cdot \Delta f + \partial^2 x_f \cdot \frac{\Delta f^2}{2!} + \partial^3 x_f \cdot \frac{\Delta f^3}{3!} + \cdots$$

Kehrt man nun letztere Reihe (4.) um (nach dem 2ten Theil dieses Systems §§. 581. 582.), um Δf in eine nach ganzen Potenzen von Δx fortlaufende Reihe zu verwandeln, so findet sich aus (4.)

$$5)\ \Delta f = \frac{1}{\partial x_f} \cdot \Delta x - \frac{\partial^2 x_f}{\partial x_f^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{3(\partial^2 x_f)^2 - \partial x_f \cdot \partial^3 x_f}{\partial x_f^5} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

Und vergleicht man diese Reihe (5.) mit der (2.), so müssen die einzelnen Koeffizienten von Δx, Δx^2, ꝛc. in beiden einander gleich seyn; und so finden sich die Gleichungen (4—6. des §. 60.) und aus ihnen noch (1—3.) auch auf diesem Wege wieder.

Anmerkung 2. Man kann aber auch die allgemeinern Gleichungen des (§. 59.) direkt finden, ohne (§. 58.) zu Hilfe nehmen zu müssen. — Sind nämlich f und x als Funktionen von v gedacht, (wo dann auch f als eine Funktion von x, und x als eine Funktion von f angesehen werden kann, in so ferne aus den Gleichungen

$$1)\ f = f_v \quad \text{und} \quad 2)\ x = x_v,$$

welche zur Rechten bloß v enthalten, dieses v eliminirt werden kann, so daß eine Gleichung zwischen den Buchstaben f und x sich ergibt, welche nach f aufgelößt, die Form $f = f_x$, dagegen nach x aufgelößt die Form $x = x_f$ annehmen wird), so hat man zuerst nach (§. 34. I.):

$$\partial f = \partial f_x \cdot \partial x,$$

woraus 1) $\partial f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ hervorgeht, wo alle ∂ ohne Beisatz, Ableitungen nach v bezeichnen. Dann ist aber nach dieser Formel (1.) wiederum

$$\partial(\partial f_x)_x = \frac{\partial(\partial f_x)}{\partial x} \text{ d. h. } 2)\ \partial^2 f_x = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x};$$

$$\partial(\partial^2 f_x)_x = \frac{\partial(\partial^2 f_x)}{\partial x} \text{ d. h. } 3)\ \partial^3 f_x = \frac{\partial(\partial^2 f_x)}{\partial x};$$

u. s. w. f.; wo alle ∂ ohne Beisatz, nach v genommen sind. — In so ferne aber ∂f und ∂x selber wieder Funktionen von v sind, wie f und x selbst es waren, so hat man nach (§. 36. N. 3.):

$$\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x}{\partial x^2};$$

also aus (2.)

$$4)\ \partial^2 f_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x}{\partial x^3};$$

Und dann ist wiederum nach (§. 36. N. 3.)

$$5)\ \partial(\partial^2 f_x) = \frac{\partial x^3 \cdot \partial(\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x) - (\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x) \cdot \partial(\partial x^3)}{(\partial x^3)^2};$$

folglich aus (3. und 5.):

$$6)\ \partial^3 f_x = \frac{\partial x^2 \cdot \partial^3 f - 3\partial x \cdot \partial^2 x \cdot \partial^2 f + 3\partial f \cdot \partial^2 x^2 - \partial x \cdot \partial f \cdot \partial^3 x}{\partial x^5},$$

alle bloßen ∂ ohne Beisatz, nach v verstanden. Und man sieht, wie diese Resultate (1. 4. 6.) wiederum mit denen (§. 59. I. II. III. ꝛc.) zusammenfallen; während umgekehrt dann aus diesen Gleichungen (1. 4. 6.) ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ꝛc. (nach v) in ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. und ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ꝛc. (letztere nach v) auf gemeinem algebraischen Wege *) ausgedrückt werden können, wodurch man abermals die Gleichungen (I. II. III. ꝛc. des §. 58.) erhält.

Anmerkung 3. Auch kann man aus den Gleichungen

1) $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x$;

2) $\partial^2 f = \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x$;

3) $\partial^3 f = \partial^3 f_x \cdot \partial x^3 + 3\partial^2 f_x \cdot \partial x \cdot \partial^2 x + \partial f_x \cdot \partial^3 x$;

u. s. w. f.; in Verbindung mit den Gleichungen

---

*) D. h. durch bloßes Auflösen der Gleichungen nach den nun als unbekannt gedachten ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$ ꝛc.

4) $\partial x = \partial x_f \cdot \partial f$;

5) $\partial^2 x = \partial^2 x_f \cdot \partial f^2 + \partial x_f \cdot \partial^2 f$

6) $\partial^3 x = \partial^3 x_f \cdot \partial f^3 + 3\partial^2 x_f \cdot \partial f \cdot \partial^2 f + \partial x_f \cdot \partial^3 f$;

u. s. w. f.; [welche nach (§. 58. I. II. III. ꝛc.) allemal statt finden, so oft x und f als Funktionen von v angesehen werden, während man bald f als Funktion von x, bald x als Funktion von f ansieht, und alle bloßen ∂ als Ableitungen nach v genommen hat]; ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ꝛc. eliminiren; dann werden ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, von selber wegfallen, und man wird als Eliminations-Gleichungen, wiederum die Gleichungen des (§. 60.) oder der (Anmerkung 1.) erhalten, welche die Beziehungen zwischen den Ableitungen von f_x nach x, und denen von x_f nach f genommen enthalten.

Anmerkung 4. I. Um vorläufig sogleich einen Nutzen dieser Formeln zu sehen, so sey gegeben

1) $f = Sin\,x$, d. h. $f_x = Sin\,x$;

also auch 2) $\partial f_x = Cos\,x$, d. h. $\partial(Sin\,x)_x = Cos\,x$;

und 3) $\partial^2 f_x = -Sin\,x$, d. h. $\partial^2(Sin\,x)_x = -Sin\,x$;

4) $\partial^3 f_x = -Cos\,x$, d. h. $\partial^3(Sin\,x)_x = -Cos\,x$;

u. s. w. f.

Gesetzt man wünschte nun in der Gleichung $f = Sin\,x$, x als eine Funktion von f anzusehen, so daß also

5) $x = \frac{1}{Sin} f$ d. h. $x_f = \frac{1}{Sin} f$ wird,

und nun die Ableitungen hiervon, nämlich ∂x_f, $\partial^2 x_f$, $\partial^3 x_f$, ꝛc. zu finden, so müßte man, sollten die vorstehenden Sätze nicht benutzt werden, wie bereits (§. 2. Anmerkung) gesagt worden ist, die Funktion, welche durch $\frac{1}{Sin} f$ angezeigt ist, erst wirklich herstellen, nämlich die Gleichung

6) $x = \frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1-f^2} + i \cdot f)$,

und nun daraus (nach §. 41.)

7) $\partial x_f = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$;

so wie dann hieraus weiter

8) $\partial^2 x_f = \partial\left[(1-f^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_f = \frac{f}{(1-f^2)^{\frac{3}{2}}}$;

und hieraus wiederum

$$9)\quad \partial^3 x_f = \partial\left[\frac{f}{(1-f^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_f = \frac{1+2f^2}{(1-f^2)^{\frac{5}{2}}};$$

u. s. w. f. finden.

Wendet man dagegen die Formeln des (§. 60.) an,*) so findet sich, ohne die Gleichung (6.) haben zu müssen, sogleich

$$10)\quad \partial x_f = 1:\partial f_x = 1:Cos\,x = 1:\sqrt{1-f^2},$$

in so ferne $Sin\,x = f$, also $Cos\,x = \sqrt{1-Sin\,x^2} = \sqrt{1-f^2}$ ist. Desgleichen findet man ferner

$$11)\quad \partial^2 x_f = -\frac{\partial^2 f_x}{\partial f_x^3} = \frac{Sin\,x}{Cos\,x^3} = \frac{f}{(1-f^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und

$$12)\quad \partial^3 x_f = \frac{3(\partial^2 f_x)^2 - \partial f_x \cdot \partial^3 f_x}{\partial f_x^5} = \frac{3\,Sin\,x^2 + Cos\,x^2}{Cos\,x^5} = \frac{1+2\,Sin\,x^2}{Cos\,x^5} = \frac{1+2f^2}{(1-f^2)^{\frac{5}{2}}};$$

u. s. w. f.

Wollte man von

$$13)\quad f = Sin\,x$$

sogleich die Ableitungen nach allem v nehmen, links und rechts x, also auch f, als eine beliebige Funktion dieses beliebigen Veränderlichen v denkend, so erhielt man

$$14)\quad \partial f = Cos\,x \cdot \partial x;$$

$$15)\quad \partial^2 f = -Sin\,x \cdot \partial x^2 + Cos\,x \cdot \partial^2 x;$$

$$16)\quad \partial^3 f = -Cos\,x \cdot \partial x^3 - 3\,Sin\,x \cdot \partial x \cdot \partial^2 x + Cos\,x \cdot \partial^3 x;$$

u. s. w. f.;

und man konnte aus (14.) sogleich finden

$$17)\quad \partial x = \frac{\partial f}{Cos\,x} = \frac{\partial f}{\sqrt{1-f^2}},$$

welche sogleich in

$$18)\quad \partial x_f = \frac{1}{Cos\,x} = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$$

übergeht, entweder dadurch, daß man durch ∂f wegdividirt, weil $\frac{\partial x}{\partial f} = \partial x_f$ ist, oder dadurch daß man $v = f$ nimmt, weil dann

---

*) Entweder (N. N. 1—3.), um aus ihnen ∂x_f, $\partial^2 x_f$, $\partial^3 x_f$, ꝛc. durch algebraische Auflösung zu finden, oder die (N. N. 4—6.), indem man x und f durchgehends mit einander vertauscht, oder direkt die (N. N. 7—9.)

$\partial f = 1$ wird. Aus den übrigen Gleichungen (15. 16. ꝛc.) fände sich dann $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ꝛc. nach v oder nach f, je nachdem man $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ꝛc. stehen läßt, oder 0 dafür setzt. — Jetzt hätte man aber bloß (§. 59.) wiederholt, für diesen speziellen Fall.

II. Um ein anderes Beispiel zu geben, so habe man die beiden Gleichungen

$$1)\ f = v - r \cdot Sin\frac{v}{r} \quad \text{und} \quad 2)\ x = r - r \cdot Cos\frac{v}{r},$$

so daß aus den beiden Gleichungen durch Elimination von v, eine Gleichung zwischen x und f hervorgeht, welche nach f aufgelöst die Form

$$3)\ f = f_x$$

annehmen wird, wo links bloß f, rechts aber bloß ein Ausdruck in x vorkommt. Man soll nun die Ableitungen ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. finden, jedoch ohne, was in dem gegenwärtigen Beispiel zu einer verwickelten transcendenten Gleichung führen würde, die Gleichung (3.) wirklich herstellen zu müssen.

Es ist aber nicht schwer aus den Gleichungen (1. und 2.) ∂f, ∂x, $\partial^2 f$, $\partial^2 x$, $\partial^3 f$, $\partial^3 x$, ꝛc. ꝛc. zu finden, alle ∂ nach v verstanden. Und hat man diese gefunden, nämlich

$$4)\ \partial f = 1 - Cos\frac{v}{r}; \qquad 5)\ \partial x = + Sin\frac{v}{r};$$

$$6)\ \partial^2 f = +\frac{1}{r}\cdot Sin\frac{v}{r}; \qquad 7)\ \partial^2 x = +\frac{1}{r}\cdot Cos\frac{v}{r};$$

$$8)\ \partial^3 f = +\frac{1}{r^2}\cdot Cos\frac{v}{r}; \qquad 9)\ \partial^3 x = -\frac{1}{r^2}\cdot Sin\frac{v}{r};$$

u. s. w. f. u. s. w. f.

so darf man nur diese Werthe statt ∂f, ∂x, $\partial^2 f$, $\partial^2 x$, $\partial^3 f$, $\partial^3 x$, ꝛc. in die Formeln des (§. 59.) substituiren, und man erhält die gesuchten ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. zwar als Funktionen von v ausgedrückt, aus denen aber mittelst der Gleichung (2.) v eliminirt gedacht werden kann, so daß dann bloße unmittelbare Funktionen von x erscheinen. Man erhält aber dann

$$10)\ \partial f_x = \frac{1 - Cos\frac{v}{r}}{Sin\frac{v}{r}}$$

$$11)\ \partial^2 f_x = \frac{1 - Cos\frac{v}{r}}{r\cdot\left(Sin\frac{v}{r}\right)^3}$$

u. s. w. f.

Sollte dagegen die Gleichung, welche zwischen f und x durch Elimination von v aus (1. und 2.) hervorgeht nach x aufgelöst, in der Form

$$x = x_f$$

gedacht, und die Ableitungen ∂x_f, $\partial^2 x_f$, $\partial^3 x_f$, ꝛc. gefunden werden, so müßte man in den Gleichungen des (§. 59.) durchaus x und f mit einander vertauschen, um die für den Augenblick nöthigen Formeln zu haben. Sie werden dann werden

$$\partial x_f = \frac{\partial x}{\partial f}$$

$$\partial^2 x_f = \frac{\partial f \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 f}{\partial f^3}$$

u. s. w. f., und hieraus folgerte dann für den gegenwärtigen Fall

$$12)\quad \partial x_f = \frac{Sin\,\frac{v}{r}}{1 - Cos\frac{v}{r}}$$

$$13)\quad \partial^2 x_f = -\frac{1}{r\left(1 - Cos\,\frac{v}{r}\right)^2}$$

u. s. w. f.

Man konnte aber diese letztern ∂x_f, $\partial^2 x_f$, ꝛc. auch wiederum aus den in (10. 11. ꝛc.) gefundenen ∂f_x, $\partial^2 f_x$, ꝛc. finden, wenn man die Gleichungen des (§. 60.) zu Hilfe nahm, namentlich die (N. N. 1—3.) wenn man sie nach ∂x_f, $\partial^2 x_f$, ꝛc. auflößt, oder die (N. N. 4—6.) wenn man in ihnen x und f mit einander vertauscht, oder direkt die (N. N. 7—9.). Man erhält dann

$$14)\quad \partial x_f = 1 : \partial f_x = 1 : \frac{1 - Cos\,\frac{v}{r}}{Sin\frac{v}{r}} = \frac{Sin\frac{v}{r}}{1 - Cos\frac{v}{r}},$$

$$15)\quad \partial^2 x_f = -\frac{\partial^2 f_x}{\partial f_x^3} = -\frac{1 - Cos\frac{v}{r}}{r\left(Sin\,\frac{v}{r}\right)^3} : \left\{\frac{1 - Cos\frac{v}{r}}{Sin\,\frac{v}{r}}\right\}^3$$

$$= -\frac{1}{r \cdot \left(1 - Cos\frac{v}{r}\right)^2},$$

u. s. w. f.; gerade wie in (N. N. 12. und 13.).

Und eben so könnte man, wieder mittelst der Formeln (§. 60. N. N. 4—6.) auch ∂f_x, $\partial^2 f_x$, 2c. finden, aus den bereits gefundenen ∂x_f, $\partial^2 x_f$, 2c., in (12. und 13.), wenn sie nicht schon in (10. und 11.) gefunden wären.

§. 61. Zusatz.

Ist aber F eine beliebige Funktion von x, f, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, 2c. 2c., so darf man nur statt ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, 2c. 2c. die (§. 59.) gefundenen Ausdrücke setzen, nämlich $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}$, u. s. w., wenn man F in einen andern, ihm gleichen Ausdruck F_1 verwandelt sehen will, welcher nicht mehr Ableitungen von f nach x, sondern dafür Ableitungen von f und x nach v enthält, letztere f und x als Funktionen von v gedacht.*)

Und setzt man in F statt ∂f_x, $\partial^2 f_x$, 2c. die Ausdrücke des (§. 60.), nämlich $\frac{1}{\partial x_f}$, $-\frac{\partial^2 x_f}{\partial x_f^3}$, 2c. 2c., so erhält man aus F einen ihm gleichen Ausdruck F_2, welcher x, f, aber nicht mehr Ableitungen von f_x nach x, sondern dafür Ableitungen von x_f nach f enthält.**)

---

*) So wie nämlich, was doch allemal erlaubt ist, statt x eine Funktion x_v von v gesetzt gedacht wird, so ist, weil f eine Funktion von x ist, durch die beiden Gleichungen $f = f_x$ und $x = x_v$, sogleich auch eine Gleichung zwischen f und v gegeben, so daß auch f eine Funktion von v wird. — — Und eben so wird x eine Funktion von v, sobald f eine Funktion von x, und f auch eine Funktion von v ist, weil aus den Gleichungen $f = f_x$ und $f = f_v$ auch, durch Elimination von f, die Gleichung $f_x = f_v$ ganz ohne f, bloß zwischen x und v sich ergibt.

**) So wie nämlich f eine Funktion von x ist, so hat man $f = f_x$, woraus dann sogleich auch $x = x_f$ folgt, wenn man diese Gleichung nach x auflöst; und von diesem x_f sind die Ableitungen ∂x_f, $\partial^2 x_f$, $\partial^3 x_f$, 2c. 2c. genommen verstanden.

Anmerkung. Dieses Mittel solche Ableitungsausdrücke so umzuformen wird aber sehr wichtig in der folgenden Zurückleitungs- oder Integral-Rechnung, wo gewöhnlich die Funktion f von x durch die Gleichung $F = 0$ gegeben ist, und wo es zuweilen bequem ja nothwendig wird, F in F_1 oder F_2 zu verwandeln, wo dann auch, eben weil $F_1 = F$ oder $F_2 = F$ wird, auch $F_1 = 0$, und $F_2 = 0$ seyn muß, zugleich mit $F = 0$.

Beispiel Ist z. B.

$$1)\quad F = A\cdot(x\cdot\partial y + y) - \frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y},$$

wo y als Funktion ven x gedacht, und wo die Ableitungen ∂y, $\partial^2 y$, nach x genommen sind, also statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ stehen, so hat man, $\frac{\partial y}{\partial x}$ statt dieses ∂y_x, und $\frac{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x}{\partial x^3}$ statt dieses $\partial^2 y_x$ setzend, nach (§. 59.),

$$2)\quad F = A\cdot\left(x\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + y\right) - \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x};$$

und dieser Ausdruck zur Rechten ist der gesuchte F_1, welcher x, y, aber nicht mehr, wie oben der gegebene F, die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, sondern dagegen ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ nach einem neuen Veränderlichen v genommen, enthält, während x, also auch y, als Funktionen von v gedacht worden sind.

Nimmt man hier $v = y$, (in so ferne x ebenfalls Funktion von y ist, welche aus $y = y_x$ durch Auflösung nach x hervorgeht, ist diese Annahme allemal erlaubt), so hat man $\partial y = 1$, $\partial^2 y = 0$, und man erhält nun aus (2.)

$$3)\quad F = A\cdot\left(\frac{x}{\partial x} + y\right) + \frac{(\partial x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x},$$

wo alle ∂ nach y genommen sind, und welcher Ausdruck zur Rechten derselbe F_2 ist, welcher auch, dem (§. 61.) zufolge, aus (1.) hervorgegangen seyn würde, wenn man in (1.), dem (§. 60.) zufolge,

$$\frac{1}{\partial x_y} \text{ statt } \partial y_x, \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3} \text{ statt } \partial^2 y_x$$

substituirt hätte.

Wäre aber y diejenige Funktion von x, welche den Ausdruck F in (1.), $=0$ macht, hätte man also

$$4)\quad A\cdot(x\cdot\partial y_x + y) - \frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = 0,$$

so wäre auch $F_1 = 0$ d. h.

$$5)\quad A\cdot\left(x\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + y\right) - \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x} = 0,$$

und auch $F_2 = 0$ d. h.

$$6)\quad A\cdot\left(\frac{x}{\partial x_y} + y\right) + \frac{(\partial x_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y} = 0,$$

wo in (5.) die bloßen ∂ sich auf einen beliebigen neuen Veränderlichen v beziehen, von welchem x, und dann auch y, als Funktionen gedacht sind.

§. 62. Aufgabe.

Es ist f eine Funktion von x und von y, und x und y sind wiederum Funktionen von v. Man soll die Ableitungen $\partial f_{(v)}$, $\partial^2 f_{(v)}$, $\partial^3 f_{(v)}$, ꝛc. ꝛc. in Ableitungen von f nach x und nach y, so wie in Ableitungen von x und y nach v, ausdrücken.

Auflösung.

Man hat zuerst nach (§. 35. II.)

$$\text{I.}\quad \partial f = \partial f_x\cdot\partial x + \partial f_y\cdot\partial y,$$

wo ∂f, ∂x und ∂y Ableitungen nach allem v vorstellen. Um nun hieraus $\partial^2 f$ zu finden, muß man von dem Ausdruck zur Rechten noch einmal die Ableitungen nach allem v nehmen. Da nun ∂f_x, ∂f_y, Funktionen von x und y sind, wie $f_{x,y}$ selbst, folglich als solche mittelbare Funktionen von v angesehen werden müssen, so hat man nach derselben (§. 35. II.)

$$1)\quad \partial(\partial f_x) = \partial^2 f_x\cdot\partial x + \partial^{1,1} f_{x,y}\cdot\partial y,$$

$$2)\quad \partial(\partial f_y) = \partial^{1,1} f_{x,y}\cdot\partial x + \partial^2 f_y\cdot\partial y,$$

die bloßen ∂ ohne Beisatz, nach allem v verstanden. Und da die Ableitungen ∂x, ∂y (nach v), eben so wie x und y selbst, als Funktionen von v angesehen werden müssen, so kann die Ableitung von $\partial f_x\cdot\partial x$ nach v, so wie die von $\partial f_y\cdot\partial y$ nach v,

nur nach (§. 35. II. oder §. 36. N. 2.) genommen werden, so daß man hat

$$3)\quad \partial(\partial f_x \cdot \partial x) = \partial(\partial f_x) \cdot \partial x + \partial f_x \cdot \partial(\partial x),$$

$$4)\quad \partial(\partial f_y \cdot \partial y) = \partial(\partial f_y) \cdot \partial y + \partial f_y \cdot \partial(\partial y),$$

während $\partial(\partial x)$ durch $\partial^2 x$, und $\partial(\partial y)$ durch $\partial^2 y$ bezeichnet worden ist. Also findet sich nach (§. 36. N. 1.), wenn man (1.—4.) hier in Anwendung bringt:

$$\text{II.}\quad \partial^2 f = \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x + \partial f_y \cdot \partial^2 y,$$

alle ∂ ohne Beisatz, nach allem v genommen.

Nimmt man aber hier wiederum von jedem Gliede die Ableitung nach allem v, dem (§. 36. N. 1.) zufolge, jedes Glied als ein Produkt von Funktionen von v, nach (§. 36. N. 2.) behandelnd, und bedenkt man zu gleicher Zeit, daß ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, wie x und y selbst, Funktionen von v sind, während $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$ wie f und ∂f_x und ∂f_y selbst, Funktionen von x und y sind, also wiederum mittelbare Funktionen von v, so daß auf jede der letztern, wenn man von ihr die Ableitung nach allem v nimmt, wiederum der Satz (§. 35. II.) in Anwendung kommen muß; so erhält man, weil nach (§. 6. und §. 34. I. und §. 35. II.) $\partial(\partial^2 f_x) = \partial(\partial^2 f_x)_x \cdot \partial x + \partial(\partial^2 f_x)_y \cdot \partial y$, und $\partial(\partial x^2) = 2\partial x \cdot \partial^2 x$ ist,

$$5)\quad \partial(\partial f_x \cdot \partial^2 x) = \partial^2 f_x \cdot \partial x \cdot \partial^2 x + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial y \cdot \partial^2 x + \partial f_x \cdot \partial^3 x;$$

$$6)\quad \partial(\partial^2 f_x \cdot \partial x^2) = \partial(\partial^2 f_x) \cdot \partial x^2 + \partial^2 f_x \cdot \partial(\partial x^2) = \partial^3 f_x \cdot \partial x^3 + \partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \partial x^2 \cdot \partial y + 2\partial^2 f_x \cdot \partial x \cdot \partial^2 x;$$

$$7)\quad \partial(\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y) = \partial(\partial^{1,1} f_{x,y}) \cdot \partial x \cdot \partial y + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial(\partial x) \cdot \partial y + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial(\partial y) = \partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \partial x^2 \cdot \partial y + \partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y^2 + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial^2 x \cdot \partial y + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial^2 y;$$

$$8)\quad \partial(\partial^2 f_y \cdot \partial y^2) = \partial(\partial^2 f_y) \cdot \partial y^2 + \partial^2 f_y \cdot \partial(\partial y^2) = \partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y^2 + \partial^3 f_y \cdot \partial y^3 + 2\partial^2 f_y \cdot \partial y \cdot \partial^2 y;$$

$$9)\quad \partial(\partial f_y \cdot \partial^2 y) = \partial(\partial f_y) \cdot \partial^2 y + \partial f_y \cdot \partial(\partial^2 y) = \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial^2 y + \partial^2 f_y \cdot \partial y \cdot \partial^2 y + \partial f_y \cdot \partial^3 y;$$

folglich

III. $\partial^3 f = \partial^3 f_x \cdot \partial x^3 + 3\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \partial x^2 \cdot \partial y + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y^2$
$+ \partial^3 f_y \cdot \partial y^3 + \partial f_x \cdot \partial^3 x + 3(\partial^2 f_x \cdot \partial x + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial y) \cdot \partial^2 x$
$+ 3(\partial^2 f_y \cdot \partial y + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x) \cdot \partial^2 y + \partial f_y \cdot \partial^3 y.$

Auf dieselbe Weise fortfahrend findet sich auch $\partial^4 f$, $\partial^5 f$, und jede folgende Ableitung von f nach allem v, jede folgende aus der vorhergehenden, in derjenigen Form, welche in der Aufgabe vorgeschrieben war.

Beispiel Ist z. B.

1) $f = x^3 + 3x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$,

so hat man

2) $\partial f_x = 3x^2 + 6xy^2 - 3y^3$,

3) $\partial f_y = 6x^2y - 9xy^2 + 4y^3$;

folglich nach (§. 62. I.):

I. $\partial f = (3x^2 + 6xy^2 - 3y^3) \cdot \partial x + (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial y$,

wenn x und y wiederum Funktionen von v und die bloßen ∂ ohne Beisatz, nach allem v genommen gedacht sind.

Ferner findet sich

4) $\partial^2 f_x = 6x + 6y^2$,

5) $\partial^{1,1} f_{x,y} = 12xy - 9y^2$, *)

6) $\partial^2 f_y = 6x^2 - 18xy + 12y^2$;

folglich nach (§. 62. II.):

II. $\partial^2 f = 6(x + y^2) \cdot \partial x^2 + 2(12xy - 9y^2) \cdot \partial x \cdot \partial y$
$+ (6x^2 - 18xy + 12y^2) \cdot \partial y^2 + (3x^2 + 6xy^2 - 3y^3) \cdot \partial^2 x$
$+ (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial^2 y.$

Auch ist noch

7) $\partial^3 f_x = 6$; 8) $\partial^{1,2} f_{x,y} = 12x - 18y$; **)

9) $\partial^{2,1} f_{x,y} = 12y$; 10) $\partial^3 f_y = -18x + 24y$;

---

*) Dieses Resultat erhält man eben so sicher, man mag (2.) noch einmal nach y, oder (3.) noch einmal nach x ableiten.

**) Auch dieses Resultat erhält man gleichmäßig sicher, man mag $\partial^{1,1} f_{x,y}$ noch einmal nach y ableiten, oder $\partial^2 f_y$ noch einmal nach x. — Ueberhaupt zeigen sich hier die (§§. 27. 28.) veranschaulicht.

demnach nach (§. 62. III.):

$$\text{III. } \partial^3 f = 6\cdot\partial x^3 + 36y\cdot\partial x^2\cdot\partial y + 3(12x - 18y)\cdot\partial x\cdot\partial y^2$$
$$+ (-18x + 24y)\cdot\partial y^3 + (3x^2 + 6xy^2 - 3y^3)\cdot\partial^3 x$$
$$+ 3[(6x + 6y^2)\cdot\partial x + (12xy - 9y^2)\cdot\partial y]\cdot\partial^2 x$$
$$+ 3[(6x^2 - 18xy + 12y^2)\cdot\partial y + (12xy - 9y^2)\cdot\partial x]\cdot\partial^2 y$$
$$+ (6x^2 y - 9xy^2 + 4y^3)\cdot\partial^3 y;$$

die bloßen ∂ ohne Beisatz, nach allem v genommen. U. s. w. f.

Weil jedoch auch f eine Summe ist, so kann man ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ꝛc. nach allem v auch dadurch erhalten, daß man von den einzelnen Gliedern dieser Summe nach allem v die Ableitung nimmt, nach (§. 36. N. 1.). Dann erhält man auch noch

$$\partial^n f = \partial^n(x^3) + \partial^n(3x^2y^2) - \partial^n(3xy^3) + \partial^n(y^4)$$

die bloßen ∂ nach allem v verstanden, aus welcher Formel dann ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ꝛc. sich ergibt, je nachdem man 1, 2, 3, ꝛc. statt n setzt. Nun ist aber nach (§. 58.)

$$\partial(x^3) = 3x^2\cdot\partial x;$$
$$\partial^2(x^3) = 6x\cdot\partial x^2 + 3x^2\cdot\partial^2 x;$$

u. s. f.; so wie nach (§. 62.)

$$\partial(3x^2y^2) = 6xy^2\cdot\partial x + 6x^2y\cdot\partial y;$$
$$\partial^2(3x^2y^2) = 6y^2\cdot\partial x^2 + 24xy\cdot\partial x\cdot\partial y + 6x^2\cdot\partial y^2 + 6xy^2\cdot\partial^2 x + 6x^2y\cdot\partial^2 y;$$

u. s. f.; und nach demselben (§. 62.):

$$\partial(3xy^3) = 3y^3\cdot\partial x + 9xy^2\cdot\partial y;$$
$$\partial^2(3xy^3) = 3y^3\cdot\partial^2 x + 18y^2\cdot\partial x\cdot\partial y + 18xy\cdot\partial y^2 + 9xy^2\cdot\partial^2 y;$$

u. s. f.; zuletzt nach (§. 58.)

$$\partial(y^4) = 4y^3\cdot\partial y;$$
$$\partial^2(y^4) = 12y^2\cdot\partial y^2 + 4y^3\cdot\partial^2 y;$$

u. s. f.

Und so erhält man für ∂f, $\partial^2 f$, ꝛc. dieselben Resultate, wie sie unter den vorstehenden (I. II. III.) bereits gefunden worden sind.

Ueberhaupt ersieht man aus dieser letztern Entwickelung, daß es gar nicht nöthig ist, in solchen einzelnen Fällen genau die Formeln des (§.) selbst anzuwenden, sondern daß man nur aus einander ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, ꝛc. abzuleiten braucht, nach denselben Prinzipien, wie solche im (§.) zur Erlangung der Formeln selbst angewandt worden sind, weil man dann die Formeln allemal wieder erhält, aber für diesen einzelnen Fall nur entwickelt, also genau dasselbe, was die allgemeinen Formeln in ihrer Anwendung auf diesen einzelnen Fall ebenfalls liefern.

§. 63. Zusatz.

Ist $v = x$, also f eine unmittelbare Funktion von x und y, in welcher aber wieder y eine Funktion von x ist, so daß f zu gleicher Zeit als eine gemischte Funktion von x angesehen werden kann, so hat man $\partial x = \partial x_x = 1$,
$\partial^2 x = \partial^2 x_x = \partial(\partial x_x) = 0$, $\partial^3 x = 0 = \partial^4 x =$ rc. rc.;
und die Formeln (I. II. III. rc. des §. 62.) reduziren sich nun auf

I. $\partial f = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y$;

II. $\partial^2 f = \partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial y + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2 + \partial f_y \cdot \partial^2 y$;

III. $\partial^3 f = \partial^3 f_x + 3\partial^{2,1} f_{x,y} \cdot \partial y + 3\partial^{1,2} f_{x,y} \cdot \partial y^2 + \partial^3 f_y \cdot \partial y^3$
$+ 3(\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x + \partial^2 f_y \cdot \partial y) \cdot \partial^2 y + \partial f_y \cdot \partial^3 y$.

IV. U. s. w. f.

Dieselben Formeln hätte man aber bequemer direkt aus der nach (§. 34. I.) bereits vorhandenen (I.) durch ferneres Ableiten nach allem x, erhalten können, genau so verfahrend, wie im vorhergehenden (§. 62.).

Anmerkung. So oft aber in $f_{x,y}$, x und y Funktionen von v sind, so daß man hat 1) $x = x_v$, 2) $y = y_v$, so kann man aus diesen beiden Gleichungen (1. u. 2.) v eliminirt sich denken, und man wird dann auch 3) $y = y_x$, d. h. y als eine Funktion von x erhalten. Umgekehrt ist $y = y_x$ gegeben, und wird x_v statt x gesetzt, so geht auch y in eine Funktion von v über, welche durch $y_{(v)}$ oder y_v bezeichnet seyn kann. Die beiden Fälle der (§§. 62. und 63.) sind daher jedesmal zu gleicher Zeit vorhanden, der eine nie ohne den andern.

Beispiel. Sollten in dem Beispiel zu (§. 62.) die Ableitungen nach allem x genommen werden, so erhielte man dem gemäß aus

$f = x^3 + 3x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$, sogleich

I. $\partial f = 3x^2 + 6xy^2 - 3y^3 + (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial y$;

II. $\partial^2 f = 6(x + y^2) + 6(4xy - 3y^2) \cdot \partial y + 6(x^2 - 3xy + 2y^2) \cdot \partial y^2$
$+ (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial^2 y$;

III. $\partial^3 f = 6 + 36y \cdot \partial y + 18(2x - 3y) \cdot \partial y^2 + 6(-3x + 4y) \cdot \partial y^3$
$+ [18(x^2 - 3xy + 2y^2) \cdot \partial y + 12xy - 9y^2] \cdot \partial^2 y$
$+ (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial^3 y$;

u. s. w. f.; alle bloßen ∂, nach allem x verstanden.

§. 64. Zusatz.

Sind in f des (§. 62.) x und y solche Funktionen von v, welche $f_{v)}$ identisch (für jeden Werth von v) zu Null machen, so daß auch $f_{(v+\Delta v)} = 0$ ist, so sind auch die einzelnen Ableitungen nach allem v, wie solche (§. 62.) gefunden sind, d. h. ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, rc. rc. einzeln identisch $= 0$ für jeden Werth von v *); so also daß mit $f_{(v)} = f = 0$, auch zu gleicher Zeit ist

$$\text{I. } \partial f_{(v)} = \partial f = 0; \quad \text{II. } \partial^2 f_{(v)} = \partial^2 f = 0;$$

$$\text{III. } \partial^3 f_{v)} = \partial^3 f = 0; \text{ u. s. w. f.}$$

Setzt man aber in diesen Gleichungen (I. II. III. rc.) statt ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$ rc. die (§. 62. I. II. III. rc.) gefundenen Werthe, so hat man Gleichungen zwischen x, y, ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^3 x$, $\partial^3 y$, rc. (alle ∂ ohne Beisatz, nach v genommen), so daß man ∂y in ∂x, $\partial^2 y$ in ∂x und $\partial^2 x$, $\partial^3 y$ in ∂x, $\partial^2 x$ und $\partial^3 x$, und jedesmal noch in x und y selber, ausdrücken kann, während $f = 0$ auch noch y in x liefert.

Aber eben wenn man unter x und unter y solche Funktionen von v sich denkt, welche $f_{x,y}$ oder f, $= 0$ machen, so ist es dasselbe, wie wenn man unter y diejenige Funktion von x sich denkt, welche $f_{x,y} = 0$ macht für jeden Werth von x, also die Funktion von x, welche für y sich ergibt, wenn die Gleichung $f_{x,y} = 0$ nach y aufgelöst wird; so daß $f_{(x)} = 0$, und auch $f_{(x+\Delta x)} = 0$ ist; und es muß also dann auch jede der im (§. 63. I. II. III...) stehenden Ableitungen $\partial f_{(x)}$ oder ∂f, $\partial^2 f_{(x)}$ oder $\partial^2 f$, $\partial^3 f_{(x)}$ oder $\partial^3 f$, rc. (nach allem x ge-

---

*) Da nämlich $f_{(v+\Delta v)} = 0$ ist für jeden Werth von v und von Δv, so ist auch die Reihe für $f_{(v+\Delta v)}$, nämlich die Taylorsche Reihe

$$f + \partial f \cdot \Delta v + \partial^2 f \cdot \frac{\Delta v^2}{2!} + \partial^3 f \cdot \frac{\Delta v^3}{3!} + \cdots$$

für jeden Werth von Δv, $= 0$, also auch jeder einzelne der Koeffizienten, nämlich ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, rc. $= 0$, für jeden Werth von v; wie solches (§. 7.) bereits bewiesen steht.

nommen) identisch, (für jeden Werth von x), = 0 seyn, so daß man mit $f_{x,y} = 0$ oder $f_{(x)} = 0$ zu gleicher Zeit hat die Gleichungen

I. $\partial f_{(x)} = 0$; II. $\partial^2 f_{(x)} = 0$; III. $\partial^3 f_{(x)} = 0$; rc. rc.

welche Gleichungen, wenn statt $\partial f_{(x)}$, $\partial^2 f_{(x)}$, $\partial^3 f_{(x)}$ rc. rc., die Ausdrücke (I. II. III. rc. des §. 63.) gesetzt werden, die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ rc., in x und in y ausgedrückt liefern, während y selbst aus $f_{x,y} = 0$ in x ausgedrückt gefunden werden kann.

Beispiel. Denkt man sich in den Beispielen zu (§§. 62 u. 63.) unter y gerade diejenigen Funktionen von x, welche

f_x d. h. 1) $x^3 + 3x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$, = 0

macht, so ist auch noch

$\partial f_{(x)}$ d. h. 2) $3x^2 + 6xy^2 - 3y^3 + (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial y$, = 0,

$\partial^2 f_{(x)}$ d. h. 3) $6(x + y^2) + 6(4xy - 3y^2) \cdot \partial y$
$+ 6(x^2 - 3xy + 2y^2) \cdot \partial y^2 + (6x^2y - 9xy^2 + 4y^3) \cdot \partial^2 y$, = 0,

u. s. w. f.; so daß aus diesen 3 Gleichungen, y, ∂y und $\partial^2 y$ durch bloße algebraische Auflösung derselben Gleichungen nach diesen 3 Unbekannten gefunden werden können, alles in x ausgedrückt, wo ∂y, $\partial^2 y$, rc. statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, rc. stehen.

Dieselben Resultate würden sich natürlich auch ergeben, wenn man die Gleichung (1.) nach y auflösen, sonach die Funktion von x, welche y vorstellt, wirklich herstellen, und dann von diesem y_x nach (§. 41.), die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, rc. direkt finden wollte.

§. 65. Zusatz.

Sind x und y nicht bloß Funktionen von t, sondern auch zugleich Funktionen von w (d. h. Funktionen von t und w), und ist, wie im (§. 62.) f eine Funktion von x und y, so hat man außer der Gleichung des (§. 62.)

1) $\partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t$;

noch

2) $\partial f_{(w)} = \partial f_x \cdot \partial x_w + \partial f_y \cdot \partial y_w$.

Und eben so hat man außer der andern Gleichung des (§. 62.), nämlich

$$3)\ \partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x_t^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_t \cdot \partial y_t + \partial^2 f_y \cdot \partial y_t^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t + \partial f_y \cdot \partial^2 y_t;$$

noch

$$4)\ \partial^2 f_{(w)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x_w{}^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_w \cdot \partial y_w + \partial^2 f_y \cdot \partial y_w{}^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_w + \partial f_y \cdot \partial^2 y_w;$$

und auch noch, wenn man von (1.) nach allem w, oder von (2.) nach allem t die Ableitung nimmt, nach denselben Prinzipien:

$$5)\ \partial^{1,1} f_{(t),(w)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x_t \cdot \partial x_w + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_t \cdot \partial y_w + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_w \cdot \partial y_t + \partial^2 f_y \cdot \partial y_t \cdot \partial y_w + \partial f_x \cdot \partial^{1,1} x_{t,w} + \partial f_y \cdot \partial^{1,1} y_{t,w};$$

u. s. w. f.

Aus diesen Gleichungen kann man nun auch umgekehrt, die Ableitungen von f nach x und nach y, nämlich ∂f_x, ∂f_y, $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$, u. s. w. f., in lauter Ableitungen nach t und w ausdrücken; und zwar erhält man aus (1. und 2.):

$$6)\ \partial f_x = \frac{\partial f_{(t)} \cdot \partial y_w - \partial f_{(w)} \cdot \partial y_t}{\partial x_t \cdot \partial y_w - \partial x_w \cdot \partial y_t},$$

$$7)\ \partial f_y = \frac{-\partial f_{(t)} \cdot \partial x_w + \partial f_{(w)} \cdot \partial x_t}{\partial x_t \cdot \partial y_w - \partial x_w \cdot \partial y_t};$$

und gerade so findet sich aus (3. 4. 5.) sogleich $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$, in $\partial^2 f_{(t)}$, $\partial^2 f_{(w)}$, $\partial^{1,1} f_{(t),(w)}$, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 x_w$, $\partial^2 y_t$, $\partial^2 y_w$, $\partial f_{(t)}$, $\partial f_{(w)}$, ∂x_t, ∂x_w, ∂y_t und ∂y_w ausgedrückt.

§. 66. Zusatz.

In dem einfachern Falle dagegen, wo f eine unmittelbare Funktion von x und y vorstellt, und x wiederum eine Funktion von t und von y, geht f in eine Funktion von t und von y über, so daß $f = f_{(t)} = f_{(y)}$ ist. Weil aber t bloß implizit in f steckt und nur in so ferne t in x vorkommt, so finden in Bezug auf t bloß die Formeln des (§. 58.) statt. In Bezug auf y dagegen können die Formeln des (§. 63.) angewandt werden, in so ferne y explizit und implizit (in x) zugleich vorkommt. Man hat daher:

$$1)\ \partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t;\ ^{*)}$$

$$2)\ \partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_x \cdot \partial x_t^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t;$$

u. s. w. f. (nach §. 58.). — Dagegen nach (§. 63.)

$$3)\ \partial f_{(y)} = \partial f_x \cdot \partial x_y + \partial f_y;$$

$$4)\ \partial^2 f_{(y)} = \partial f_x \cdot \partial^2 x_y + \partial^2 f_x \cdot \partial x_y^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_y + \partial^2 f_y;$$

so wie auch noch (aus 3. oder 1.), indem man von (3.) nach allem t, oder von (1.) nach allem y die Ableitungen nimmt:

$$5)\ \partial^{1,1} f_{(t),(y)} = \partial f_x \cdot \partial^{1,1} x_{t,y} + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_t + \partial^2 f_x \cdot \partial x_y \cdot \partial x_t.$$

Aus diesen Gleichungen (1. und 3.) findet man dann, wenn sie nach ∂f_x, ∂f_y aufgelöst werden:

$$6)\ \partial f_x = \partial f_{(t)} : \partial x_t = \frac{\partial f}{\partial x},$$

wenn hier zuletzt die ∂ ohne Beisatz, nach t verstanden werden;

$$7)\ \partial f_y = \partial f_{(y)} - (\partial f_{(t)} \cdot \partial x_y) : \partial x_t = \frac{\partial x_t \cdot \partial f_{(y)} - \partial x_y \cdot \partial f_{(t)}}{\partial x_t},$$

während aus (2. 4. 5.) auch noch, wenn jene Gleichungen nach $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$ aufgelöst werden, hervorgeht:

$$8)\ \partial^2 f_x = \frac{\partial x_t \cdot \partial^2 f_{(t)} - \partial f_{(t)} \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^3} = \frac{\partial x \cdot \partial^2 f - \partial f \cdot \partial^2 x}{\partial x^3},$$

wenn hier zuletzt alle bloßen ∂ nach allem t genommen gedacht werden;

$$9)\ \partial^{1,1} f_{x,y} = \frac{\partial x_t^2 \cdot \partial^{1,1} f_{(t),(y)} - \partial f_{(t)} \cdot \partial^{1,1} x_{t,y} \cdot \partial x_t - \partial^2 f_{(t)} \cdot \partial x_t \cdot \partial x_y + \partial f_{(t)} \cdot \partial^2 x_t \cdot \partial x_y}{\partial x_t^3};$$

$$10)\ \partial^2 f_y = \partial^2 f_{(y)} - \frac{\partial f_{(t)}}{\partial x_t} \cdot \partial^2 x_y - \partial^2 f_x \cdot \partial x_y^2 - 2 \cdot \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_y,$$

wo hier in (10.) zur Rechten, statt $\partial^2 f_x$ und $\partial^{1,1} f_{x,y}$ die in

---

*) Auch kann hier, weil t bloß in x vorkommt, ohne Verwirrung befürchten zu dürfen, bloß f_t, ∂f_t, $\partial^2 f_t$, 2c. statt $f_{(t)}$, $\partial f_{(t)}$, $\partial^2 f_{(t)}$, 2c. gesetzt werden.

(8. und 9.) dafür gefundenen Werthe gesetzt werden müssen, um alle unmittelbaren Ableitungen von f (nach x und y, in so ferne letztere in $f_{x,y}$ unmittelbar vorkommen) in Ableitungen nach allem t und nach allem y, ausgedrückt zu haben.

§. 67. Zusatz.

Dieser eben betrachtete spezielle Fall ist, wenn aus ihm nachstehender abgeleitet wird, für einige Fälle der Anwendung besonders wichtig.

Bezeichnet nämlich f einen aus x und y zusammengesetzten Ausdruck (welcher letztere selbst bisher allemal durch $f_{x,y}$ vorgestellt worden ist), so ist

$$1)\quad f = f_{x,y}$$

eine Gleichung zwischen den 3 Buchstaben f, x und y, so zwar, daß zur Linken bloß der Buchstabe f, zur Rechten aber der Buchstabe f gar nicht, sondern bloß x und y vorkommen. Wird nun diese Gleichung (1.) nach x aufgelöst, so erhält man daraus

$$2)\quad x = x_{f,y},$$

welche Gleichung zur Linken bloß den Buchstaben x, zur Rechten aber gar nicht x enthält, sondern bloß die Buchstaben f und y. — Denkt man sich aber diese Funktion $x_{f,y}$, welche bloß f und y enthält, in die Gleichung (1.) statt des Buchstaben x (zur Rechten), substituirt, so geht solche nothwendig in die identische Gleichung

$$f = f$$

über, so daß zur Rechten das y und alles übrige von selber sich weghebt, und bloß f allein übrig bleibt.

So wie man sich also in $f_{x,y}$ unter x den Ausdruck $x_{f,y}$ vorgestellt und wirklich gesetzt denkt, so enthält er f implizit, kann daher $f_{(f)}$ geschrieben werden; aber dies $f_{(f)}$ ist dann nichts weiter als f selbst ($1 \cdot f$, f^1, $1 \cdot f^1 + 0$, ꝛc.). Derselbe enthält aber dann auch y, explizit und implizit zugleich, ist jedoch für jeden Werth von y identisch $= f$ (d. h. nach y konstant), so daß seine Ableitungen nach allem y, nothwendig $= 0$ sind.

Man hat also hier genau die Voraussetzungen des (§. 66.), nämlich f ist eine Funktion von x und y, und x wiederum eine Funktion von t und y, wenn natürlich hier f statt t gesetzt wird, so daß dasmal noch besonders ist:

$$\partial f_{(t)} = \partial f_{(f)} = 1; \quad \partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_{(f)} = 0, \text{ u. s. w.},$$

nur daß hier auch der Umstand noch hinzutritt, daß die dadurch aus $f_{x,y}$ hervorgehende $f_{(y)}$ nach y konstant ist, folglich, daß man noch hat $\partial f_{(y)} = 0$, $\partial^2 f_{(y)} = 0$, $\partial^{1,1} f_{(t),(y)} = 0$, u. s. w. f.

Die Formeln des (§. 66.) verwandeln sich nun in folgende

1) $1 = \partial f_x \cdot \partial x_f;$

2) $0 = \partial^2 f_x \cdot \partial x_f^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_f;$

3) $0 = \partial f_x \cdot \partial x_y + \partial f_y;$

4) $0 = \partial f_x \cdot \partial^2 x_y + \partial^2 f_x \cdot \partial x_y^2 + 2\,\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_y + \partial^2 f_y;$

5) $0 = \partial f_x \cdot \partial^{1,1} x_{f,y} + \partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x_f + \partial^2 f_x \cdot \partial x_y \cdot \partial x_f;$

u. s. w. f.; dann

6) $\partial f_x = 1 : \partial x_f;$

7) $\partial f_y = -\partial x_y : \partial x_f;$

8) $\partial^2 f_x = -\partial^2 x_f : \partial x_f^3;$

9) $\partial^{1,1} f_{x,y} = (\partial^2 x_f \cdot \partial x_y - \partial^{1,1} x_{f,y} \cdot \partial x_f) : \partial x_f^3;$

10) $$\partial^2 f_y = \frac{-\partial^2 x_y \cdot \partial x_f^2 - \partial^2 x_f \cdot \partial x_y^2 + 2\,\partial^{1,1} x_{f,y} \cdot \partial x_f \cdot \partial x_y}{\partial x_f^3};$$

von welchen jedoch die letztern (6.—10.) aus den erstern (1.—5.) auch durch bloße algebraische Auflösung derselben Gleichungen (1.—5.) in Bezug auf die nun als unbekannt angesehenen Ableitungen von f nach dem unmittelbaren x und y, erhalten werden.

So oft aber f als eine unmittelbare Funktion von x und y gedacht ist, so oft ist auch dadurch gerade x als eine unmittelbare Funktion von f und y anzusehen; und die vorstehenden Gleichungen (6.—10.) lehren dann allemal, wie statt der Ableitungen von $f_{x,y}$ nach dessen unmittelbaren x und y, gleiche Ausdrücke gesetzt werden können, welche aber bloß Ableitungen von $x_{f,y}$,

nach den in dieser Funktion x nun unmittelbar vorhanden gedachten f und y genommen, vorkommen, wenn nur $x = x_{f,y}$ durch Auflösung der Gleichung $f = f_{x,y}$ nach dem Unbekannten x, erhalten gedacht wird.

§. 68. Zusatz.

Man kann sich aber dieser Formeln des (§. 65.) auch bedienen, um einen Ausdruck F, welcher f, x, y, und Ableitungen von f nach x und y, nämlich ∂f_x, ∂f_y, $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$, ꝛc. enthält, in einen andern ihm gleichen Ausdruck F_1 zu verwandeln, welcher noch x, y, f, aber statt der Ableitungen von f nach x und y, lauter Ableitungen von f, y, x, nach zwei neuen Veränderlichen t und w, von welchen x und y als Funktionen angesehen werden, enthält.

§. 69. Zusatz.

Und auf dieselbe Art kann man sich der Formeln des (§. 67.) bedienen um einen Ausdruck F, welcher x, y, f und ∂f_x, ∂f_y, $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$, ꝛc. ꝛc. enthält, in einen andern, ihm gleichen Ausdruck F_2 zu verwandeln, welcher noch x, y, f, aber nicht mehr Ableitungen von $f_{x,y}$ nach x und nach y, sondern dagegen Ableitungen von $x_{f,y}$, nach f und nach y enthält, unter $x_{f,y}$ den Ausdruck verstanden, welcher sich aus $f = f_{x,y}$ ergibt, wenn solche Gleichung nach x aufgelöst wird.

Beispiel. Ist z. B. während z als eine Funktion von x und y gedacht wird, so daß die Gleichung $z = z_{x,y}$ statt findet:

$$\text{I.}\quad F = \frac{(1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial z_x \cdot \partial^2 z_y - \partial z_y \cdot \partial^2 z_x} - A \cdot xyz \cdot \partial^{1,1} z_{x,y}$$

gegeben, so würde man, sollte der Ausdruck F in einen andern umgeformt werden, welcher nicht mehr ∂z_x, ∂z_y, ꝛc. ꝛc. sondern dafür ∂x_z, ∂x_y, ꝛc. ꝛc. enthält, den (§§. 67. und 69.) zu Folge, dort z statt f setzend, erhalten

1) $\partial z_x = 1 : \partial x_z$;

2) $\partial z_y = -\partial x_y : \partial x_z$;

3) $\partial^2 z_x = -\partial^2 x_z : \partial x_z^3$;

4) $\partial^2 z_y = \dfrac{-\partial^2 x_y \cdot \partial x_z^2 - \partial^2 x_z \cdot \partial x_y^2 + 2\partial^{1,1} x_{z,y} \cdot \partial x_z \cdot \partial x_y}{\partial x_z^3}$;

5) $\partial^{1,1} z_{x,y} = (\partial^2 x_z \cdot \partial x_y - \partial^{1,1} x_{z,y} \cdot \partial x_z) : \partial x_z^3$;

also, wenn man diese Werthe in (I.) substituirt,

$$\text{II.}\quad F = \frac{\partial x_z \cdot (1 + \partial x_y^2 + \partial x_z^2)^{\frac{3}{2}}}{2\partial^{1,1} x_{z,y} \cdot \partial x_z \cdot \partial x_y - \partial^2 x_y \cdot \partial x_z^2 - \partial^2 x_z \cdot \partial x_y^2 - \partial^2 x_z \cdot \partial x_y} - \frac{Axyz(\partial^2 x_z \cdot \partial x_y - \partial^{1,1} x_{z,y} \cdot \partial x_z)}{\partial x_z^3},$$

welcher Ausdruck zur Rechten der gesuchte F_2 ist, wo unter x verstanden ist der Ausdruck $x_{y,z}$, welcher aus der Gleichung $z = z_{x,y}$ (die zwischen z und x und y, der Voraussetzung zufolge, statt findet) für x hervorgeht, wenn man solche nach dem Unbekannten x auflöst, oder aufgelöst sich denkt.

Wäre aber unter z diejenige Funktion von x und y verstanden, welche den Ausdruck F in (I.) $= 0$ macht, so würde natürlich der Ausdruck F_2 in (II.), weil er $= F$ ist, nun auch $= 0$ seyn; und es würde also letzterer Gleichung $F_2 = 0$, x als diejenige Funktion von y und z genügen, welche ans $z = z_{x,y}$, für x sich ergibt.

§. 70. Aufgabe.

Es ist f eine unmittelbare Funktion von x, y und z, und x, y, z wiederum Funktionen von v, so daß f in $f_{(v)}$ übergehen kann. Man soll die Ableitungen ∂f, $\partial^2 f$, $\partial^3 f$, 2c. nach allem v finden, in die Ableitungen von f nach x, y, z, und von x, y, z nach v, ausgedrückt.

Auflösung.

Man hat nach (§. 38. III.)

I. $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z$.

Nimmt man aber hiervon wiederum, genau wie (§. 62.) verfahrend, die Ableitungen nach allem v, wobei man erwägt, daß ∂f_x, ∂f_y, ∂f_z, wie f selbst, unmittelbare Funktionen von x, y, z sind, während ∂x, ∂y, ∂z, so wie x, y, z, Funktionen von v seyn werden, so erhält man:

II. $\partial^2 f = \partial f_x \cdot \partial^2 x + \partial f_y \cdot \partial^2 y + \partial f_z \cdot \partial^2 z$
$+ \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2$
$+ 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial x \cdot \partial z + 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial y \cdot \partial z + \partial^2 f_z \cdot \partial z^2.$

Und nimmt man hiervon, gerade wieder so verfahrend, noch einmal die Ableitung nach allem v, so erhält man weiter $\partial^3 f$, und daraus wieder $\partial^4 f$, ꝛc. in der verlangten Form.

§. 71. Zusatz.

Zu gleicher Zeit, wenn 1) $x = x_v$, 2) $y = y_v$, 3) $z = z_v$ ist, kann man v eliminiren und erhält dann 4) $y = y_x$, 5) $z = z_x$, d. h. es sind dann auch y und z Funktionen von x.

Denkt man sich nun in $f_{x,y,z}$, statt y und z diese Funktionen von x, nämlich y_x und z_x gesetzt, so geht f in $f_{(x)}$ über, und man hat dann

I. $\partial f = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z;$

II. $\partial^2 f = \partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial y + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial z$
$+ 2 \cdot \partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial y \cdot \partial z + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2 + \partial f_y \cdot \partial^2 y + \partial f_z \cdot \partial^2 z;$

III. u. s. w. f.;

wo die Ableitungen ∂ (ohne Beisatz), nach allem x genommen sind.

§. 72. Zusatz.

Ist aber in $f_{x,y,z}$ bloß z eine Funktion von x und y, und denkt man sich in f statt z diese Funktion $z_{x,y}$ substituirt, so wird f eine mittelbare Funktion von x und y, nämlich $f_{(x),(y)}$; und nun kann man verlangen, daß die Ableitungen von f nach allem x, oder nach allem y ausgedrückt werden sollen, in die Ableitungen von f nach dem unmittelbaren x, nach dem unmittelbaren y und nach dem unmittelbaren z, so wie in die Ableitungen von z nach x und nach y.

Man hat in diesem Falle nach dem bereits hinlänglich beschriebenen Verfahren

$$\text{I.}\quad \partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x;$$

$$\text{II.}\quad \partial f_{(y)} = \partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y;$$

$$\text{III.}\quad \partial^2 f_{(x)} = \partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial z_x + \partial^2 f_z \cdot \partial z_x^2 + \partial f_z \cdot \partial^2 z_x;$$

$$\text{IV.}\quad \partial^{1,1} f_{(x),(y)} = \partial^{1,1} f_{x,y} + \partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial z_x + \partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial z_y + \partial^2 f_z \cdot \partial z_x \cdot \partial z_y + \partial f_z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y};$$

$$\text{V.}\quad \partial^2 f_{(y)} = \partial^2 f_y + 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial z_y + \partial^2 f_z \cdot \partial z_y^2 + \partial f_z \cdot \partial^2 z_y;$$

VI. U. s. w. f. auch die Ableitungen der höhern Ordnungen.

§. 73. Zusatz.

Dächte man sich in (§. 70.) unter x, y und z solche Funktionen von v, welche $f_{x,y,z} = 0$ machen, für jeden Werth von v, so wäre auch mit

$$f_{x,y,z} = f_{(v)} = 0,$$

noch

$$\text{I.}\ \partial f = 0; \qquad \text{II.}\ \partial^2 f = 0; \qquad \text{III. U. s. f.;}$$

die Ableitungszeichen ∂ (ohne Beisatz), nach allem v verstanden; — und diese Gleichungen, wenn in ihnen statt ∂f, $\partial^2 f$, 2c. aus (I. II. 2c. des §. 70.) die Ausdrücke zur Rechten gesetzt werden, sind Gleichungen zwischen ∂x, ∂y, ∂z, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, 2c. 2c. so daß ∂z, $\partial^2 z$, 2c. in die Ableitungen ∂y, $\partial^2 y$, 2c. 2c., ∂x, $\partial^2 x$, 2c. ausgedrückt werden können.

Hat man dann außer

$$f_{x,y,z} = f_{(v)} = 0, \text{ auch noch } \varphi_{x,y,z} = \varphi_{(v)} = 0,$$

so hat man außer

$$\partial f_{(v)} = 0, \quad \partial^2 f_{(v)} = 0, \quad \partial^3 f_{(v)} = 0, \text{ 2c. 2c.}$$

auch noch $\partial \varphi_{(v)} = 0$, $\partial^2 \varphi_{(v)} = 0$, $\partial^3 \varphi_{(v)} = 0$, 2c. 2c.

welche Gleichungen dann die Ableitungen ∂y, ∂z, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, $\partial^3 y$, $\partial^3 z$, 2c. in ∂x, $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, 2c. (alle ∂ nach allem v genommen) ausgedrückt liefern.

§. 74. Zusatz.

Weil aber dann, wenn x, y, z Funktionen von v sind, auch y und z als Funktionen von x ausgedrückt werden können, so ist dies zugleich, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, der Fall, wo man in $f_{x,y,z}$ statt y und z, solche Funktionen y_x, z_x von x gesetzt sich denkt, welche $f_{(x)}$ für jeden Werth von x, also auch $f_{(x+\Delta x)}$ identisch zu Null machen, so daß man dann außer

$$f_{(x)} = 0$$

auch noch $\partial f_{(x)} = 0$, $\partial^2 f_{(x)} = 0$, $\partial^3 f_{(x)} = 0$, ꝛc. ꝛc.

hat, unter ∂ jetzt Ableitungen nach allem x gedacht, also statt ∂f, $\partial^2 f$ ꝛc. die Ausdrücke gesetzt, welche (§. 71.) für diesen Fall entwickelt stehen.

Und hat man außer

$$f_{x,y,z} = f_{(x)} = 0, \quad \text{auch noch} \quad \varphi_{x,y,z} = \varphi_{(x)} = 0,$$

so daß also y und z die Funktionen von x vorstellen, welche aus der Auflösung der beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$, nach y und z sich ergeben, so hat man außer

$$\partial f_{(x)} = 0, \quad \partial^2 f_{(x)} = 0, \quad \partial^3 f_{(x)} = 0, \text{ ꝛc.}$$

auch noch $\partial\varphi_{(x)} = 0$, $\partial^2\varphi_{(x)} = 0$, $\partial^3\varphi_{(x)} = 0$, ꝛc.

so daß man mittelst dieser Gleichungen, in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$, nicht bloß y und z, sondern auch ∂y und ∂z, $\partial^2 y$ und $\partial^2 z$, $\partial^3 y$ und $\partial^3 z$, ꝛc. in x ausdrücken kann.

Auf diesem Wege würde man also zuletzt dasselbe erhalten, was man auch erhält, wenn man die Gleichungen $f_{x,y,z} = 0$ und $\varphi_{x,y,z} = 0$ nach y und z auflöst, dadurch für y und z Funktionen von x erhält, und von diesen dann die Ableitungen nach x direkt nach (§. 41.) nimmt.

Beispiel 1. Sind gegeben die Gleichungen

$$1)\quad y^3 + 3atx = bc^2;$$

$$2)\quad x^3 + 3cty = a^2b,$$

so daß dadurch x und y als Funktionen von t gegeben sind, so erhält man, nach allem t die Ableitungen nehmend:

$$3)\quad y^2 \cdot \partial y + at \cdot \partial x + ax = 0,$$

$$4)\quad x^2 \cdot \partial x + ct \cdot \partial y + cy = 0.$$

Und wenn man hievon noch einmal die Ableitungen nach allem t nimmt:

$$5)\quad y^2 \cdot \partial^2 y + 2y \cdot \partial y^2 + at \cdot \partial^2 x + 2a \cdot \partial x = 0,$$

$$6)\quad x^2 \cdot \partial^2 y + 2x \cdot \partial x^2 + ct \cdot \partial^2 y + 2c \cdot \partial y = 0,$$

u. s. w. f., wo ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, 2c. statt ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ 2c. stehen, und durch welche Gleichungen nicht allein x und y, sondern auch ∂x und ∂y, so wie $\partial^2 x$ und $\partial^2 y$, als Funktionen von t gegeben sind.

Beispiel 2. Sind aber gegeben die beiden Gleichungen

$$1)\quad (z-x)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

und

$$2)\quad (z-x)\left(1 - Sin\frac{x}{r}\right) + y \cdot Cos\frac{x}{r} = 0,$$

so erhält man, in so ferne man sich unter z und y die durch diese beiden Gleichungen gegebenen Funktionen von x, also z_x und y_x vorgestellt denkt, nach allem x ableitend:

aus (1.)··· $3)\quad (z-x)(\partial z - 1) + (y-r) \cdot \partial y = 0,$

aus (2.)··· $4)\quad \left(1 - Sin\frac{x}{r}\right)(\partial z - 1) - \frac{z-x}{r} \cdot Cos\frac{x}{r}$

$$+ Cos\frac{x}{r} \cdot \partial y - \frac{y}{r} \cdot Sin\frac{x}{r} = 0;$$

aus welchen beiden Gleichungen ∂y und ∂z (nach x genommen) in x, y, z ausgedrückt gefunden werden können, während sie in Verbindung mit (1. und 2.) y, z, ∂y, ∂z, in x ausgedrückt liefern, auf bloßem algebraischen Wege.

Und nimmt man von (3.) und (4.) noch einmal die Ableitungen nach allem x, so erhält man noch

aus (3.)··· $5)\quad (z-x) \cdot \partial^2 z + (\partial z - 1)^2 + (y-r) \cdot \partial^2 y + \partial y^2 = 0;$

aus (4.)··· $6)\quad \left(1 - Sin\frac{x}{r}\right) \cdot \partial^2 z + \frac{z-x}{r^2} \cdot Sin\frac{x}{r} - \frac{2}{r} Cos\frac{x}{r}(\partial z - 1)$

$$-\frac{2}{r} Sin\frac{x}{r} \cdot \partial y + Cos\frac{x}{r} \cdot \partial^2 y - \frac{y}{r^2} \cdot Cos\frac{x}{r} = 0,$$

aus welchen Gleichungen (5. und 6.) auch $\partial^2 y$ und $\partial^2 z$ in z, y und x, also auch in lauter x, ausgedrückt werden können, auf bloßem algebraischen Wege, sobald man die frühern Gleichungen (3. 4.) oder (1—4.) noch zu Hilfe nimmt.

Und immer wird man dieselben Resultate für ∂y, ∂z, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, erhalten, welche man auch gefunden haben würde, wenn man die

Gleichungen (1. und 2.) nach y und z aufgelöst, also y und z als y_x und z_x wirklich hergestellt, wenn man also aus ihnen

$$z = x - r \cdot Cos\frac{x}{r} \quad \text{und} \quad y = r - r \cdot Sin\frac{x}{r}$$

entwickelt, und nun nach (§. 41.) direkt die Ableitungen ∂z, ∂y, $\partial^2 z$, $\partial^2 y$ gefunden hätte; (in so ferne $\partial^2 z = \partial(\partial z)$, $\partial^2 y = \partial(\partial y)$ ist, folglich $\partial^2 z$, $\partial^2 y$ aus ∂z, ∂y, nach demselben (§. 41.) gefunden werden könnte, sobald letztere ∂z, ∂y nur zuerst wirklich als Funktionen von x gefunden sind).

Beispiel 3. Sind gegeben

$$1)\; F_{x,y} = t \qquad \text{und} \qquad 2)\; F'_{x,y} = t,$$

so hat man, nach allem t ableitend

$$3)\; \partial F_x \cdot \partial x + \partial F_y \cdot \partial y = 1;$$

$$4)\; \partial F'_x \cdot \partial x + \partial F'_y \cdot \partial y = 1;$$

$$5)\; \partial F_x \cdot \partial^2 x + \partial^2 F_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y + \partial^2 F_y \cdot \partial y^2 + \partial F_y \cdot \partial^2 y = 0;$$

u. s. w. f.

Beispiel 4. Hieher gehört auch noch der Fall, wo eine Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ gegeben ist, und in solcher die Ableitungen nach t genommen werden sollen, wo t selber wieder eine gegebene Funktion $\psi_{x,y}$ seyn soll. Man hat nämlich dann die beiden Gleichungen

$$1)\; \varphi_{x,y} = 0, \qquad 2)\; \psi_{x,y} = t,$$

von welchen, wie im vorigen Beispiele, die Ableitungen nach allem t genommen werden müssen.

Und ist $t = \psi_{x,y}$ nicht selbst gegeben, sondern dafür schon die Ableitungsgleichung nach allem t, nämlich

$$3)\; \partial\psi_x \cdot \partial x + \partial\psi_y \cdot \partial y = 1,$$

so bleibt alles bei'm Alten, nur daß man dann die Gleichung (2.) selbst nicht hat.

Wäre z. B. $\alpha)\; x^2 + xy + y^2 = 0$ und $\beta)\; \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = 1$ gegeben, so erhielte man aus (α.)

$\gamma)\; 2x \cdot \partial x + 2y \cdot \partial y + x \cdot \partial y + y \cdot \partial x = 0,$

$\delta)\; (2x + y)\partial^2 x + (2y + x)\partial^2 y + 2\partial x^2 + 2\partial x \cdot \partial y + 2\partial y^2 = 0,$

während aus (β.) d. h. aus $\partial x^2 + \partial y^2 = 1$, noch

$\varepsilon)\; \partial x \cdot \partial^2 x + \partial y \cdot \partial^2 y = 0$ hervorgeht,

so daß nun durch die Gleichungen (β, γ, δ, ε) ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ gegeben sind in x, y wenigstens, während aus (α.) noch x in y, oder y in x ausgedrückt werden kann, so daß nur noch die Gleichung fehlt, welche in Verbindung mit (α.) zur Bestimmung von x und y in t dienen sollte.

§. 75. Zusatz.

Ist dagegen in $f_{x,y,z}$, z als diejenige Funktion von x und y gedacht, welche f zu Null macht, für jeden Werth von x und y, so hat man außer

$$f_{x,y,z} = f_{(x),(y)} = f = 0,$$

auch noch die Gleichungen

$$\partial f_{(x)} = 0, \quad \partial f_{(y)} = 0, \quad \partial^2 f_{(x)} = 0,$$
$$\partial^{1,1} f_{(x),(y)} = 0, \quad \partial^2 f_{(y)} = 0, \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

welche Gleichungen, wenn man statt $\partial f_{(x)}$, $\partial f_{(y)}$, $\partial^2 f_{(x)}$, $\partial^{1,1} f_{(x),(y)}$, $\partial^2 f_{(y)}$, ꝛc. ꝛc., die (§. 72.) dafür gefundenen Ausdrücke setzt, sowohl z als auch ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$, ꝛc. ꝛc. in x und in y ausgedrückt liefern.

Beispiel 1. Ist z. B. z diejenige Funktion von x und y, welche aus der Gleichung

1) $a^2b^2 \cdot z^2 + a^2c^2 \cdot y^2 + b^2c^2 \cdot x^2 = a^2b^2c^2$

sich ergibt, so hätte man noch, nach x und nach y ableitend:

2) $a^2b^2z \cdot \partial z_x + b^2c^2x = 0$ oder $a^2z \cdot \partial z_x + c^2x = 0$,

3) $a^2b^2z \cdot \partial z_y + a^2c^2y = 0$ oder $b^2z \cdot \partial z_y + c^2y = 0$.

Und, diese Gleichungen noch einmal nach allem x und nach allem y ableitend:

4) $a^2 \cdot \partial z_x^2 + a^2z \cdot \partial^2 z_x + c^2 = 0$,

5) $\partial z_y \cdot \partial z_x + z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} = 0$,

6) $b^2 \cdot \partial z_y^2 + b^2z \cdot \partial^2 z_y + c^2 = 0$;

aus welchen Gleichungen z, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$ in x und in y ausgedrückt gefunden werden, und zwar genau so, wie man sie auch finden wird, wenn man die Gleichung (1.) zuerst nach z auflöst, also

$$z = \frac{\sqrt{a^2b^2c^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2}}{ab}$$

findet, und hievon nun direkt nach (§. 41.) ∂z_x, $\partial^2 z_x$, so wie auch ∂z_y, $\partial^2 z_y$ und $\partial^{1,1} z_{x,y}$ ausmittelt.

Beispiel 2. Wäre

1) $(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = 0$

die Gleichung, wodurch z als Funktion von x und y gegeben seyn soll, so hätte man:

2) $(z-c)\cdot\partial z_y + y - b = 0$,

3) $(z-c)\cdot\partial z_x + x - a = 0$,

4) $(z-c)\cdot\partial^2 z_y + \partial z_y^2 + 1 = 0$,

5) $(z-c)\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + \partial z_x \cdot \partial z_y = 0$,

6) $(z-c)\cdot\partial^2 z_x + \partial z_x^2 + 1 = 0$;

woraus die Ableitungen ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ und $\partial^2 z_y$, so wie z selbst, in x und in y ausgedrückt, auf bloßem algebraischen Wege gefunden werden können.

§. 76. Zusatz.

Ist f eine unmittelbare Funktion von x, y, z, und sind x, y, z wiederum Funktionen nicht bloß von v, sondern von mehren, z. B. von den 3 Veränderlichen v, w, t, so hat man noch viel mehr solcher Gleichungen, als die (§. 70.) hingestellten; und zwar zunächst die Gleichungen der ersten Ordnung:

1) $\partial f_{(t)} = \partial f_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_t + \partial f_z \cdot \partial z_t$;

2) $\partial f_{(w)} = \partial f_x \cdot \partial x_w + \partial f_y \cdot \partial y_w + \partial f_z \cdot \partial z_w$;

3) $\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x_v + \partial f_y \cdot \partial y_v + \partial f_z \cdot \partial z_v$.

Und aus diesen Gleichungen kann man nun umgekehrt durch Auflösung derselben nach ∂f_x, ∂f_y, ∂f_z, diese letztern Ableitungen in lauter Ableitungen nach den neuen Veränderlichen v, w, t, ausdrücken.

Und findet man weiter, nach (§. 70.), auch noch 4) $\partial^2 f_{(t)}$, 5) $\partial^2 f_{(w)}$, 6) $\partial^2 f_{(v)}$, 7) $\partial^{1,1} f_{(t),(w)}$, 8) $\partial^{1,1} f_{(t),(v)}$, 9) $\partial^{1,1} f_{(w),(v)}$, wie in (1—3.) $\partial f_{(t)}$, $\partial f_{(w)}$, $\partial f_{(v)}$, gefunden sind, so kann man umgekehrt durch alge-

braische Auflösung aus den 6 Gleichungen (4. — 9.) wiederum die 6 Ableitungen $\partial^2 f_x$, $\partial^2 f_y$, $\partial^2 f_z$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^{1,1} f_{x,z}$ und $\partial^{1,1} f_{y,z}$ in lauter Ableitungen nach v, w, t ausgedrückt erhalten.

Und dieser Formeln kann man sich bedienen, um einen Ausdruck F von x, y, z, f, ∂f_x, ∂f_y, ∂f_z, $\partial^2 f_x$, ꝛc. ꝛc. in einen andern F_1 zu verwandeln, welcher noch x, y, z, f, aber nicht mehr die Ableitungen von f nach x, y und z, sondern dafür Ableitungen von f, x, y und z nach 3 neuen Veränderlichen v, w, t, enthält.

§. 77. Zusatz.

Man kann aber auch bloß statt x eine Funktion von t, y und z in $f_{x,y,z}$ substituirt denken. Dann ist t nur in f enthalten in so ferne es in x steckt, während y und z nun explizit und implizit (in x) zugleich vorkommen. Man kann nun wieder theils nach (§. 58.) theils nach (§. 63.) $\partial f_{(t)}$, $\partial f_{(y)}$, $\partial f_{(z)}$ finden, desgleichen $\partial^2 f_{(t)}$, $\partial^2 f_{(y)}$, $\partial^2 f_{(z)}$, $\partial^{1,1} f_{(t),(y)}$, $\partial^{1,1} f_{(t),(z)}$, $\partial^{1,1} f_{(y),(z)}$, u. s. w.; und aus diesen Gleichungen umgekehrt durch algebraische Auflösung die unmittelbaren Ableitungen ∂f_x, ∂f_y, ∂f_z, $\partial^2 f_x$, $\partial^{1,1} f_{x,y}$, $\partial^2 f_y$, u. s. w, in die Ableitungen nach t und nach allem y und nach allem z ausdrücken.

Der einfachste und für die gewöhnlichen Anwendungen wichtigste hieher gehörige Fall ist der, wo aus der Gleichung

$$f = f_{x,y,z}$$

durch Auflösung nach x, gefunden worden ist

$$x = x_{f,y,z};$$

und wo nun diese Funktion $x_{f,y,z}$ von f, y und z, in $f = f_{x,y,z}$ unter x gedacht wird. Was eben t war, ist nun f; aber die Funktion $f_{x,y,z}$ geht dadurch, daß $x_{f,y,z}$ statt x gesetzt wird, bloß in f über, so daß $f_{(y)}$, $f_{(z)}$ identisch (für jeden Werth von y und z) bloß f, also von y und z unabhängig (nach y und nach z konstant) sind, also daß auch alle Ableitungen von f nach allem y und nach allem z (nämlich $\partial f_{(y)}$, $\partial f_{(z)}$, $\partial^2 f_{(y)}$,

$\partial^{1,1}f_{(y),(z)}$, $\partial^2 f_{(z)}$, u. s. w. f.) identisch $= 0$ sind, während

$$\partial f_{(t)} = \partial f_{(f)} = 1, \quad \partial^2 f_{(t)} = \partial^2 f_{(f)} = 0,$$
$$\partial^{1,1}f_{(t),(y)} = \partial^{1,1}f_{(f),(y)} = 0, \quad \partial^{1,1}f_{(t),(z)} = \partial^{1,1}f_{(f),(z)} = 0,$$

u. s. w. f. ist.

Die hieher gehörigen Formeln werden daher noch einfacher, und liefern dann die Ableitungen von f nach dem unmittelbaren x, y, z ausgedrückt, in Ableitungen von $x_{f,y,z}$, nach f, nach y und nach z; unter der Voraussetzung daß $x_{f,y,z}$ die Funktion von f, y und z vorstellt, welche aus der Gleichung $f = f_{x,y,z}$, (die links f, rechts aber f nicht, sondern bloß x, y und z enthält) erhalten wird, wenn man solche nach x auflöst.

§. 78. Lehrsatz.

Die bisherigen Betrachtungen kann man auf Funktionen f von beliebig viel Veränderlichen x, y, z, u ꝛc. mit der größten Leichtigkeit ausdehnen.

Es sey z. B. f eine unmittelbare Funktion von 4 Veränderlichen x, y, z und u.

A. Sind nun x, y, z, u selber wieder Funktionen von v, so hat man

I. $\partial f = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z + \partial f_u \cdot \partial u$;

II. $\partial^2 f = \partial f_x \cdot \partial^2 x + \partial f_y \cdot \partial^2 y + \partial f_z \cdot \partial^2 z + \partial f_u \cdot \partial^2 u$
$+ \partial^2 f_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2$
$+ 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial x \cdot \partial z + 2\partial^{1,1} f_{x,u} \cdot \partial x \cdot \partial u + 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial y \cdot \partial z$
$+ 2\partial^{1,1} f_{y,u} \cdot \partial y \cdot \partial u + \partial^2 f_z \cdot \partial z^2 + 2\partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial z \cdot \partial u + \partial^2 f_u \cdot \partial u^2$;

III. U. s. w. f.;

alle ∂ ohne Beisatz, stillschweigend nach allem v verstanden.

Und sind x, y, z, u solche Funktionen von v, welche f für jeden Werth von v zu Null machen, so ist außer $f = 0$, auch noch $\partial f = 0$, $\partial^2 f = 0$, $\partial^3 f = 0$, ꝛc. ꝛc.

B. Ist $v = x$, oder sind y, z, u, Funktionen von x, so hat man

I. $\partial f = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y + \partial f_z \cdot \partial z + \partial f_u \cdot \partial u$;

II. $\partial^2 f$ = dem was aus (A. II.) wird, wenn überall $\partial x = 1$, und $\partial^2 x = 0$ gesetzt wird, wo dann alle bloßen ∂ ohne Beisatz, nach allem x genommen sind.

Und sind y, z, u solche Funktionen von x, welche $f = 0$ machen für jeden Werth von x, so hat man auch noch $\partial f = 0$, $\partial^2 f = 0$, ꝛc. ꝛc., die bloßen ∂ nach allem x verstanden.

Sind demnach 3 Gleichungen

$$f_{x,y,z,u} = 0, \qquad \varphi_{x,y,z,u} = 0, \qquad \psi_{x,y,z,u} = 0,$$

gegeben, und dadurch y, z, u als Funktionen von x, so hat man noch $\partial f = 0$, $\partial^2 f = 0$, ꝛc., $\partial\varphi = 0$, $\partial^2\varphi = 0$, ꝛc., $\partial\psi = 0$, $\partial^2\psi = 0$, ꝛc. so daß man die Ableitungen ∂y, ∂z, ∂u, ꝛc., $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, $\partial^2 u$, ꝛc. mit y, z, u, ꝛc., in x ausdrücken kann.

C. Sind z, u Funktionen von x, y, so daß f in $f_{(x),(y)}$ übergeht, so hat man

I. $\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x + \partial f_u \cdot \partial u_x$;

II. $\partial f_{(y)} = \partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y + \partial f_u \cdot \partial u_y$;

III. $\partial^2 f_{(x)} = \partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial z_x + 2\partial^{1,1} f_{x,u} \cdot \partial u_x + \partial^2 f_z \cdot \partial z_x^2$
$+ 2\partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial z_x \cdot \partial u_x + \partial^2 f_u \cdot \partial u_x^2 + \partial f_z \cdot \partial^2 z_x + \partial f_u \cdot \partial^2 u_x$;

IV. $\partial^{1,1} f_{(x),(y)} = \partial^{1,1} f_{x,y} + \partial^{1,1} f_{x,z} \cdot \partial z_y + \partial^{1,1} f_{x,u} \cdot \partial u_y$
$+ \partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial z_x + \partial^2 f_z \cdot \partial z_x \cdot \partial z_y + \partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial z_x \cdot \partial u_y$
$+ \partial^{1,1} f_{y,u} \cdot \partial u_x + \partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial u_x \cdot \partial z_y + \partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial u_x \cdot \partial z_y$
$+ \partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial u_x \cdot \partial z_y + \partial f_z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial f_u \cdot \partial^{1,1} u_{x,y}$;

V. $\partial^2 f_{(y)} = \partial^2 f_y + 2\partial^{1,1} f_{y,z} \cdot \partial z_y + 2\partial^{1,1} f_{y,u} \cdot \partial u_y + \partial^2 f_z \cdot \partial z_y^2$
$+ 2\partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial z_y \cdot \partial u_y + \partial^2 f_u \cdot \partial u_y^2 + \partial f_z \cdot \partial^2 z_y + \partial f_u \cdot \partial^2 u_y$.

VII. U. s. w. f.

Und sind z, u, ꝛc. solche Funktionen von x und y, welche f identisch (für jeden Werth von x und von y) zu Null machen, so ist auch $\partial f_{(x)} = 0$, $\partial f_{(y)} = 0$, $\partial^2 f_{(x)} = 0$, $\partial^{1,1} f_{(x),(y)} = 0$, $\partial^2 f_{(y)} = 0$, ꝛc. ꝛc.

Wenn daher außer $f = 0$ auch noch $\varphi_{x,y,z,u} = 0$ ge-

geben ist, so daß gerade durch diese beiden Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$, z und u als diejenigen Funktionen von x und y gegeben sind, welche $f = 0$ und $\varphi = 0$ machen, so hat man außer $f = 0$ und $\varphi = 0$, auch noch $\partial f_{(x)} = 0$, $\partial f_{(y)} = 0$, $\partial \varphi_{(x)} = 0$, $\partial \varphi_{(y)} = 0$, $\partial^2 f_{(x)} = 0$, $\partial^{1,1} f_{(x),(y)} = 0$, $\partial^2 f_y = 0$, $\partial^2 \varphi_{(x)} = 0$, $\partial^{1,1} \varphi_{(x),(y)} = 0$, $\partial^2 \varphi_{(y)} = 0$, rc. rc.; also so viele Gleichungen, um außer z und u auch noch die Ableitungen ∂z_x, ∂z_y, ∂u_x, ∂u_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^2 z_y$, $\partial^2 u_x$, $\partial^2 u_y$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^{1,1} u_{x,y}$, rc. rc. in x und in y ausgedrückt zu erhalten.

D. Ist dagegen bloß u eine Funktion von x, y und z, so daß f in $f_{(x),(y),(z)}$ übergeht, so hat man:

I. $\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_u \cdot \partial u_x$;

II. $\partial f_{(y)} = \partial f_y + \partial f_u \cdot \partial u_y$;

III. $\partial f_{(z)} = \partial f_z + \partial f_u \cdot \partial u_z$;

VI. $\partial^2 f_{(x)} = \partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,u} \cdot \partial u_x + \partial^2 f_u \cdot \partial u_x^2 + \partial f_u \cdot \partial^2 u_x$;

V. $\partial^2 f_{(y)} = \partial^2 f_y + 2\partial^{1,1} f_{y,u} \cdot \partial u_y + \partial^2 f_u \cdot \partial u_y^2 + \partial f_u \cdot \partial^2 u_y$;

VI. $\partial^2 f_{(z)} = \partial^2 f_z + 2\partial^{1,1} f_{z,u} \cdot \partial u_z + \partial^2 f_u \cdot \partial u_z^2 + \partial f_u \cdot \partial^2 u_z$.

VII. Eben so auch $\partial^{1,1} f_{(x),(y)}$, $\partial^{1,1} f_{(x),(z)}$, $\partial^{1,1} f_{(y),(z)}$; rc. u. s. w. f.

Ist daher u diejenige Funktion von x, y, z, welche durch $f = 0$ gegeben ist, welche also, statt u gesetzt, f für jeden Werth von x, y und z identisch zu Null macht, so hat man außer $f = 0$, noch $\partial f_{(x)} = 0$, $\partial f_{(y)} = 0$, $\partial f_{(z)} = 0$, $\partial^2 f_{(x)} = 0$, $\partial^2 f_{(y)} = 0$, $\partial^2 f_{(z)} = 0$, $\partial^{1,1} f_{(x),(y)} = 0$, $\partial^{1,1} f_{(x),(z)} = 0$, rc. rc., so daß also durch diese letztern Gleichungen nicht bloß u, sondern auch ∂u_x, ∂u_y, ∂u_z, $\partial^2 u_x$, $\partial^2 u_y$, $\partial^2 u_z$, $\partial^{1,1} u_{x,y}$, $\partial^{1,1} u_{x,z}$, rc. rc. als Funktionen von x, y und z zu finden sind.

§. 79. Zusatz.

Dem vorhergehenden zufolge ist es aber nun sehr leicht, die Ableitungen in einander auszudrücken, wie zusammengesetzt auch

die Bedingungen seyn mögen, unter denen die Ausdrücke selbst betrachtet, und die Ableitungen genommen werden sollen. — Statt aller überflüssigen weitern Aufzählung, mögen daher bloß noch einige zusammengesetztere Beispiele hier stehen.

Beispiel 1. Ist f eine Funktion von x, x wiederum eine Funktion von v, v wieder eine Funktion von t, so hat man

$$\partial f_t = \partial f_x \cdot \partial x_t; \quad \text{aber} \quad \partial x_t = \partial x_v \cdot \partial v_t,$$

demnach $\partial f_t = \partial f_x \cdot \partial x_v \cdot \partial v_t$. —

Oder auch:

$$\partial f_t = \partial f_v \cdot \partial v_t; \quad \text{aber} \quad \partial f_v = \partial f_x \cdot \partial x_v;$$

demnach wiederum

$$1) \quad \partial f_t = \partial f_x \cdot \partial x_v \cdot \partial v_t.$$

Aus

I. $\partial f_t = \partial f_x \cdot \partial x_v \cdot \partial v_t;$

folgt aber wiederum, (§. 38. N. 2.) wiederholt anwendend,

2) $\partial^2 f_t = \partial(\partial f_x)_t \cdot \partial x_v \cdot \partial v_t + \partial f_x \cdot \partial(\partial x_v)_t \cdot \partial v_t + \partial f_x \cdot \partial x_v \cdot \partial(\partial v_t)_t$

Weil aber aus (1.), ∂f_x statt f setzend,

$$3) \quad \partial(\partial f_x)_t = \partial^2 f_x \cdot \partial x_v \cdot \partial v_t,$$

und nach (§. 34. I.)

$$4) \quad \partial(\partial x_v)_t = \partial^2 x_v \cdot \partial v_t,$$

endlich

$$5) \quad \partial(\partial v_t)_t = \partial^2 v_t,$$

ist, so geht (2.) über in

II. $\partial^2 f_t = \partial^2 f_x \cdot \partial x_v^2 \cdot \partial v_t^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_v \cdot \partial v_t^2 + \partial f_x \cdot \partial x_v \cdot \partial^2 v_t.$

Dasselbe Resultat (II.) hätte man auch erhalten, wenn man nach (§. 55.)

$$\partial^2 f_t = \partial^2 f_v \cdot \partial v_t^2 + \partial f_v \cdot \partial^2 v_t \qquad \text{genommen,}$$

und darin $\partial f_v = \partial f_x \cdot \partial x_v$, so wie $\partial^2 f_v = \partial^2 f_x \cdot \partial x_v^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_v$ substituirt hätte.

Dasselbe Resultat hätte man auch erhalten, wenn man nach (§. 55.)

$$\partial^2 f_t = \partial^2 f_x \cdot \partial x_t^2 + \partial f_x \cdot \partial^2 x_t$$

genommen, und dann

$$\partial x_t = \partial x_v \cdot \partial v_t, \quad \text{so wie} \quad \partial^2 x_t = \partial^2 x_v \cdot \partial v_t^2 + \partial x_v \cdot \partial^2 v_t,$$

substituirt hätte.

U. s. w. f.

Beispiel 2. Es sey f eine unmittelbare Funktion von z und y; diese z und y selber aber wieder unmittelbare Funktionen von x, w, v, und x, w, v wiederum Funktionen von u und t; man soll die Ableitungen von f nach u und nach t, in unmittelbare Ableitungen umformen.

Man hat hier zunächst

1) $\partial f_{(u)} = \partial f_x \cdot \partial x_u + \partial f_w \cdot \partial w_u + \partial f_v \cdot \partial v_u$;

aber

2) $\partial f_x = \partial f_z \cdot \partial z_x + \partial f_y \cdot \partial y_x$;

3) $\partial f_w = \partial f_z \cdot \partial z_w + \partial f_y \cdot \partial y_w$;

4) $\partial f_v = \partial f_z \cdot \partial z_v + \partial f_y \cdot \partial y_v$;

folglich, wenn man diese Werthe in (1.) substituirt:

5) $\partial f_{(u)} = \partial f_z \cdot \partial z_x \cdot \partial x_u + \partial f_y \cdot \partial y_x \cdot \partial x_u + \partial f_z \cdot \partial z_w \cdot \partial w_u$
$+ \partial f_y \cdot \partial y_w \cdot \partial w_u + \partial f_z \cdot \partial z_v \cdot \partial v_u + \partial f_y \cdot \partial y_v \cdot \partial v_u$.

Und eben so findet sich

6) $\partial f_{(t)} = \partial f_z \cdot \partial z_x \cdot \partial x_t + \partial f_y \cdot \partial y_x \cdot \partial x_t + \partial f_z \cdot \partial z_w \cdot \partial w_t$
$+ \partial f_y \cdot \partial y_w \cdot \partial w_t + \partial f_z \cdot \partial z_v \cdot \partial v_t + \partial f_y \cdot \partial y_v \cdot \partial v_t$.

Man konnte aber auch so schließen:

Es ist

1) $\partial f_{(u)} = \partial f_z \cdot \partial z_{(u)} + \partial f_y \cdot \partial y_{(u)}$.

Aber wiederum ist:

2) $\partial z_{(u)} = \partial z_x \cdot \partial x_u + \partial z_w \cdot \partial w_u + \partial z_v \cdot \partial v_u$,

3) $\partial y_{(u)} = \partial y_x \cdot \partial x_u + \partial y_w \cdot \partial w_u + \partial y_v \cdot \partial v_u$.

Und wenn man wiederum diese Werthe in (1.) substituirt, so ergibt sich nochmals die vorstehende (N. 5.). Und gerade so nochmals (N. 6.).

Die höhern Ableitungen $\partial^2 f_{(u)}$, $\partial^{1,1} f_{(u),(t)}$, $\partial^2 f_{(t)}$, rc. rc. findet man eben so leicht, nur lassen sie sich auf noch mannigfaltigere und verschiedenere Weise ableiten, welches jedoch, um Raum zu sparen, hier nicht weiter ausgeführt seyn mag.

Anmerkung. Der Anfänger wird aber, zur leichtern Anwendung des hier Vorgetragenen, nochmals auf folgende Hauptpunkte aufmerksam gemacht:

1) Die Ableitungen von irgend einer Funktion F, nach irgend einem, oder nach mehreren der in F unmittelbar vorkommenden Veränderlichen, also z. B. die Ableitungen ∂F_x, ∂F_y, $\partial^2 F_x$, $\partial^{1,1} F_{x,y}$, rc. rc. sind immer unmittelbare Funktionen derselben Veränderlichen

wie F selbst (wenn nicht in speziellen Fällen einige derselben herausfallen, in welchen Fällen die Voraussetzung des allgemeinen Falls durchaus nicht unwahr ist, also nicht zu unrichtigen Resultaten führen kann).

2) Ob eine Funktion F eine mittelbare Funktion nur eines einzigen Veränderlichen t, oder mehrer Veränderlichen t, u, ꝛc. ist, macht in Bezug auf die Auffindung der Relationen zwischen den Ableitungen, durchaus keinen Unterschied, weil doch jedesmal nur eine Ableitung nach einem einzigen dieser letztern Veränderlichen gesucht werden kann; von welcher Ableitung nachher erst wieder die Ableitung nach demselben oder nach einem andern, also doch wiederum nur nach einem einzigen dieser Veränderlichen gesucht wird; u. s. w. f.

§. 80. Zusatz.

Wenn aber die in dieser Abtheilung vorgetragenen Lehren dazu benutzt werden, um die Ableitungen der nicht entwickelt, sondern durch Gleichungen verwickelt gegebenen Funktionen bestimmen zu können (durch neue (Ableitungs-) Gleichungen, welche mit den gegebenen (Urgleichungen) in Verbindung gebracht werden), ohne die vorgängige Auflösung der gegebenen Gleichungen nöthig zu haben, d. h. ohne die Funktionen erst entwickelt herstellen zu müssen, so macht es durchaus keinen Unterschied in der Behandlung, wenn nicht wie in den (§§. 64. 73—75. und 78.), die Gleichungen auf 0 (d. h. auf die Form $f = 0$) gebracht sind, sondern etwa die Form

$$\varphi = \psi$$

haben, weil man entweder diese letztere Form, $\varphi - \psi$ statt f setzend, auf die erstere zurückführen kann, oder auch, weil, wenn

$$\varphi = \psi$$

identisch ist, auch

$$\partial\varphi = \partial\psi, \quad \partial^2\varphi = \partial^2\psi, \quad \partial^{1,1}\varphi = \partial^{1,1}\psi, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

identisch seyn müssen, die Ableitungen jedesmal links und rechts beziehlich nach denselben und nach denjenigen Veränderlichen genommen, und in demjenigen Sinne, nach welchen Veränderlichen und in welchem Sinne die Gleichung $\varphi = \psi$ identisch ist.

Es mag dies nun noch durch einige Beispiele erläutert werden.

Beispiel 1. Ist die gegebene Gleichung

1) $y^2 + x^2 = 2mxy + a^2$,

und dadurch y als Funktion von x gegeben, so erhält man, y und x als Funktionen von v ansehend, und nach allem v ableitend, und dann durch 2 dividirend:

2) $y \cdot \partial y + x \cdot \partial x = mx \cdot \partial y + my \cdot \partial x$, *)

welche Gleichung, wenn $v = x$, also alle ∂ nach x genommen werden, weil dann $\partial x = 1$ ist, in

3) $y \cdot \partial y + x = mx \cdot \partial y + my$

übergeht, wo ∂ sich auf x bezieht. — Nimmt man hiervon wiederum die Ableitungen nach allem x, so ergibt sich

4) $y \cdot \partial^2 y + \partial y^2 + 1 = 2m \cdot \partial y + mx \cdot \partial^2 y$;

welche Gleichungen alle durch dieselbe Funktion y_x von x, identisch werden, welche die (1.) identisch macht, und welche aus der Auflösung der (1.) nach y, für y sich ergibt.

Wollte man aus (3.) zuerst auf algebraischem Wege irgend eine neue Gleichung bilden, z. B.

5) $\partial y = \frac{my - x}{y - mx}$,

und nun hiervon nach allem x die Ableitungen nehmen, so erhielte man

$$\partial^2 y = \frac{(y - mx)(m \cdot \partial y - 1) - (my - x)(\partial y - m)}{(y - mx)^2},$$

d. h. 6) $\partial^2 y = \frac{m^2 y + x \cdot \partial y - y - m^2 x \cdot \partial y}{(y - mx)^2}$;

und diese Gleichung wird durch dieselbe Funktion y_x von x, statt y gesetzt, identisch, so wie sie auch, in Verbindung mit (3. und 1.), y, ∂y, $\partial^2 y$ in x liefert, genau so, wie wenn man statt (6.) die (4.) nimmt.

Beispiel 2. Ist gegeben y in x durch die Gleichung

1) $y^3 - 3axy + x^3 = 0$,

so erhält man, nach allem x ableitend, und dann durch 3 dividirend,

2) $y^2 \cdot \partial y - ax \cdot \partial y - ay + x^2 = 0$,

3) $y^2 \cdot \partial^2 y + 2y \cdot \partial y^2 - ax \cdot \partial^2 y - 2a \cdot \partial y + 2x = 0$,

woraus y, ∂y und $\partial^2 y$ in x ausgedrückt sich finden lassen.

---

*) Bei den Ableitungsgleichungen der ersten Ordnung ist es bequem, jedesmal die Ableitungen nach einem beliebigen neuen Veränderlichen v zu nehmen.

Dieselben Werthe erhält man aber auch, wenn man die Gleichung (1.) in der Form

4) $y^3 = 3axy - x^3$,

und dann die Ableitungen nach allem x nimmt; wodurch

5) $y^2 \cdot \partial y = ax \cdot \partial y + ay - x^2$,

6) $y^2 \cdot \partial^2 y + 2y \cdot \partial y^2 = ax \cdot \partial^2 y + 2a \cdot \partial y - 2x$

sich ergibt.

Und wollte man die Gleichung (2.) oder (5.) zuvor umformen, etwa in

7) $(y^2 - ax) \cdot \partial y = ay - x^2$,

so erhielte man, nach allem x ableitend,

8) $(y^2 - ax) \cdot \partial^2 y + (2y \cdot \partial y - a) \cdot \partial y = a \cdot \partial y - 2x$,

welche Gleichung (8.) in Verbindung mit (2.) oder mit (5.) und mit (1.), y, ∂y, $\partial^2 y$ in x gerade so liefert, wie wenn man statt der (8.) die (6.) oder die (3.) nimmt.

Wollte man aber aus (1.) und (2.) oder aus (1.) und (5.) eine neue Gleichung auf algebraischem Wege ableiten, etwa dadurch, daß man a aus beiden eliminirt, so daß hervorginge

9) $y^2 \cdot \partial y - (x \cdot \partial y + y) \cdot \frac{x^3 + y^3}{3xy} + x^2 = 0$,

oder, mit 3xy weg multiplizirend,

10) $3xy^3 \cdot \partial y - (x \cdot \partial y + y)(x^3 + y^3) + 3x^3 y = 0$;

so würde hieraus nochmals eine Ableitungsgleichung der 2ten Ordnung hervorgehen, wenn man abermals nach allem x die Ableitungen nimmt. Man erhielte dann

11) $3xy^3 \cdot \partial^2 y + 9xy^2 \cdot \partial y^2 + 3y^3 \cdot \partial y - 3(x \cdot \partial y + y)(x^2 + y^2 \cdot \partial y)$
$- (x \cdot \partial^2 y + 2\partial y)(x^3 + y^3) + 3x^3 \cdot \partial y + 9x^2 y = 0$,

welche Gleichung in Verbindung mit (2.) und (1.), wiederum y, ∂y, $\partial^2 y$, in x, genau so, wie solche früher schon gefunden worden sind, liefert; oder, richtiger gesagt, welche Gleichungen noch immer identisch werden, so oft man statt y die durch (1.) gegebene Funktion y_x von x setzt, statt ∂y, $\partial^2 y$ aber, was aus diesem y_x wird, wenn man von ihr, nach (§. 41.), direkt die Ableitungen nimmt.*)

*) Wenn eine Gleichung oder wenn mehrere Gleichungen, unter gewissen Voraussetzungen (z. B. unter der Voraussetzung daß y, oder y und z, gewisse bestimmte Ausdrücke vorstellen) richtig sind, so sind alle aus ihr oder aus ihnen, algebraisch oder auf dem Wege der Ab-

Beispiel 3. Ist gegeben die Gleichung

1) $(z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2$,

und denkt man sich unter z diejenige Funktion $z_{x,y}$ von x und von y, welche sich durch Auflösung der Gleichung (1.) selbst ergibt, so sind die Ableitungen nach allem x, aber auch die Ableitungen nach allem y, nothwendig identisch = 0, so daß man also hat, durch 2 weg dividirend:

2) $(z-c)\cdot\partial z_x + x - a = 0$

3) $(z-c)\cdot\partial z_y + y - b = 0$;

und dann noch, von diesen Gleichungen wiederum die Ableitungen nach allem x und nach allem y nehmend,

4) $(z-c)\cdot \partial^2 z_x + \partial z_x^2 + 1 = 0$,

5) $(z-c)\cdot\partial^{1,1} z_{x,y} + \partial z_x\cdot\partial z_y = 0$,

6) $(z-c)\cdot \partial^2 z_y + \partial z_y^2 + 1 = 0$;

aus welchen Gleichungen (1.—6.) nun z, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$ gefunden werden können, alle in x und y ausgedrückt.

---

leitungen, genommenen Gleichungen *unter denselben Voraussetzungen* noch richtig. — Umgekehrt aber können *andere* Voraussetzungen eine der letztern Gleichungen ebenfalls identisch machen, *müssen* aber dann *nicht* nothwendig auch jede der *vorhergegangenen* Gleichungen identisch machen. — Sind z. B.

1) $y = 4z+3$ und 2) $18z-2y = 14$

richtige Gleichungen für $y = 11$ und $z = 2$, so ist auch, wenn man (1. und 2.) addirt,

3) $18z-y = 4z+17$, oder $14z-y = 17$

unter denselben Voraussetzungen, nämlich für $y = 11$ und $z = 2$, noch richtig. — Setzt man jedoch in (3.) 3 statt z und 25 statt y, so wird diese Gleichung (3.) ebenfalls richtig; allein dieselben Werthe $z = 3$ und $y = 25$ machen weder die (1.) noch die (2.) zu einer richtigen Gleichung.

Dieser einfachen Thatsache wird sich aber derjenige stets lebhaft erinnern müssen, welcher mit Ableitungs-Gleichungen umgeht, weil außerdem Schwierigkeiten entstehen dürften, deren Grund in der gemeinen Algebra, in so ferne sie *nämlich* ihren Prinzipien entgegen genommen worden wäre, aufgesucht werden müßte.

Hätte man aus der Gleichung (1.) zuerst auf algebraischem Wege abgeleitet, diese neue Gleichnng

7) $z^2+y^2+x^2+c^2+b^2+a^2=2\,(cz+by+ax)$,

so hätte man aus ihr erhalten, die Ableitungen nach allem x, und auch nach allem y nehmend (und durch 2 dividirend)

8) $z\cdot\partial z_x+x=c\cdot\partial z_x+a$,

9) $z\cdot\partial z_y+y=c\cdot\partial z_y+b$,

10) $z\cdot\ \partial^2 z_x\ +\partial z_x^2+1=c\cdot\partial^2 z_x$,

11) $z\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}+\partial z_x\cdot\partial z_y=c\cdot\partial^{1,1}z_{x,y}$,

12) $z\cdot\ \partial^2 z_y\ +\partial z_y^2+1=c\cdot\partial^2 z_y$,

welche Gleichungen (7.—12.) in die frühern (1.—6.) leicht übergehen.

Wäre aber die Gleichung (1.) unter der Bedingung gegeben, daß y selbst eine (noch unbekannte) Funktion von x, nämlich y_x seyn soll, so daß also $z=z_{x,y}=z_{(x)}$ aus (1.) sich ergibt, entweder indem man zuerst $z_{x,y}$ sucht und dann y_x statt y setzt, oder indem man sogleich in (1.) y_x statt y gesetzt sich denkt, und nun die Gleichung nach z auflöst, so daß man z_x mit dem obern $z_{(x)}$ identisch bekommt; — so könnte man doch noch immer $z_{x,y}$ unter z sich denken, so daß die Gleichung (1.) identisch wird, für jedes x und auch für jedes y, und man hätte dann noch immer die obenstehenden Gleichungen, welche nothwendig noch gelten, *wenn nur unter z nichts anders gedacht wird als dieses* $z_{x,y}$. Weil aber die Gleichung (1.) auch identisch wird, wenn man y_x unter y, und dann das aus (1.) gefundene $z_{(x)}$ (oder z_x) unter z sich denkt, so hat man nun noch in diesem Sinne aus der gegebenen (1.), nämlich aus

13) $(z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2=r^2$,

die Ableitungen nach allem x nehmend,

14) $(z-c)\cdot\partial z+(y-b)\cdot\partial y+x-a=0$,

15) $(z-c)\cdot\partial^2 z+(y-b)\cdot\partial^2 y+\partial z^2+\partial y^2+1=0$,

die bloßen ∂, nach allem x verstanden, so wie unter z nicht mehr $z_{x,y}$, sondern $z_{(x)}$ oder schlechtweg geschrieben z_x.

Wäre namentlich außer der Gleichung (1.), d. h. außer

16) $(z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2=r^2$,

noch 17) $A(z-c)+B(y-b)+C(x-a)=0$

gegeben, also durch diese beiden Gleichungen (16. und 17.) y und z als Funktionen von x bestimmt, so sind diese Gleichungen nach x

identisch, wenn man unter y und z, die durch sie bestimmten Funktionen y_x, z_x vorgestellt sich denkt. Und dann hat man außer (16.) und (17.), noch die Ableitungen nach allem x nehmend,

$$18)\quad (z-c)\cdot\partial z+(y-b)\cdot\partial y+x-a=0,$$

$$19)\quad A\cdot\partial z+B\cdot\partial y+C=0,$$

$$20)\quad (z-c)\cdot\partial^2 z+\partial z^2+(y-b)\cdot\partial^2 y+\partial y^2+1=0,$$

$$21)\quad A\cdot\partial^2 z+B\cdot\partial^2 y=0,$$

aus welchen Gleichungen (16.—21.) nun y, z, ∂y, ∂z, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$, (alle ∂ nach allem x verstanden) auf algebraischem Wege gefunden werden können.

Wenn aber auch die beiden Gleichungen (16. und 17.) zugleich gegeben sind, also identisch sind, sobald die obigen y_x und z_x statt y und z gesetzt werden, so kann man doch noch zu gleicher Zeit auch in (17.) unter z die Funktion $z_{x,y}$ sich denken, welche, ohne die (16.) zu Hülfe zu nehmen, durch bloße Auflösung der (17.) nach z, für z sich ergibt. Dann ist, wenn unter z dieser Ausdruck $z_{x,y}$ gedacht wird, die Gleichung (17.) identisch für jeden Werth von x und für jeden Werth von y, also kann man nun auch die Ableitungs-Gleichungen nehmen, nach allem x und nach allem y, und erhält dann außer der Gleichung (17.) nämlich außer

$$22)\quad A(z-c)+B(y-b)+C(x-a)=0,$$

noch

$$23)\quad A\cdot\partial z_x+C=0,$$

$$24)\quad A\cdot\partial z_y+B=0,$$

$$25)\quad A\cdot\partial^2 z_x=0,$$

$$16)\quad A\cdot\partial^{1,1} z_{x,y}=0,$$

$$27)\quad A\cdot\partial^2 z_y=0;$$

welche Gleichungen nun dienen zur Bestimmung von $z_{x,y}$, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$; unter $z_{x,y}$ das durch die einzige Gleichung (22.) bestimmte verstanden.

Schluß-Anmerkung.

Da wir doch noch einmal auf die Ableitungs-Gleichungen zurückkommen müssen, so mögen diese Beispiele vorläufig ausreichend und nur noch beispielsweise folgendes gesagt seyn. Wollte man aus den beiden Gleichungen (16. und 22.) des vorhergehenden Beispiels z und y in x ausgedrückt finden, so würde man nach den bekannten Regeln der Algebra ohngefähr so schließen. Man würde aus (22.) finden z in

x und y ausgedrückt, also $z = z_{x,y}$, dann auch aus (16.) finden z in x und y ausgedrückt, also wieder $z = z_{x,y}$; und dann würde man beide $z_{x,y}$ einander gleich setzen, um die Gleichung zwischen x und y zu erhalten, welche nachgehends y in x liefert. Für diesen Werth y_x statt y, sind also die beiden $z_{x,y}$ einander gleich, und nicht für jeden Werth von y; folglich sind beide $z_{x,y}$ als explizite Funktionen von x und y für jedes x und jedes y nicht identisch, also auch ihre Ableitungen, d. h. die beiden ∂z_x, die beiden ∂z_y, die beiden $\partial^2 z_x$, die beiden $\partial^{1,1} z_{x,y}$, und die beiden $\partial^2 z_y$ ꝛc. ꝛc. beziehlich nicht identisch, so daß also die Gleichungen (23.—27.) nur dann identisch werden, wenn unter z dasjenige $z_{x,y}$ verstanden wird, welches aus der (22.) für z sich ergibt, nicht aber wenn unter z das andere $z_{x,y}$ verstanden wird, welches aus der Gleichung (16.) hervorgegangen ist.

Zweite Abtheilung.

Verallgemeinerung der (§. 61. §. 68. §. 69. u. §. 76.) gelehrten Uebertragung der Unabhängigkeit in Ableitungsausdrücken.

---

§. 81. Aufgabe.

Es ist y als eine Funktion von x angesehen, und eine völlig beliebige Funktion F von x, y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, ⋯ $\partial^n y_x$ gegeben. Außerdem sind noch m Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, ⋯, $\varphi_m = 0$, gegeben zwischen x, y und m neuen Veränderlichen v, w, ꝛc. ꝛc., so daß je $m+1$ dieser $m+2$ Veränderlichen allemal als Funktionen des $m+2$ten angesehen werden können. Es sind nun u und t zwei beliebige dieser $m+2$ Veränderlichen x, y, ⋯⋯ w, v; — man soll die Funktion F in eine, ihr gleiche F_2 verwandeln, welche letztere nur noch u und t und die Ableitungen von u nach t, nämlich ∂u_t, $\partial^2 u_t$, $\partial^3 u_t$, ꝛc. enthält.

Auflösung.

1) Man verwandle nach (§. 61.) zuerst F in F_1, welche x, y und ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\cdots$ $\partial^n x$, $\partial^n y$ alle nach t genommen enthält.

2) Man nehme von den m gegebenen Gleichungen

$$\varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \varphi_3 = 0, \cdots\ \varphi_m = 0$$

die mn Ableitungsgleichungen nach allem t (in so ferne alle in ihnen vorkommende Veränderlichen als Funktionen von t angesehen werden können und müssen, weil nur dann diese Gleichungen für jeden Werth von t existiren, oder diese Funktionen φ_1, φ_2, φ_3, $\cdots$ φ_m für jeden Werth von t (identisch) $= 0$ sind). Man hat dann die mn Ableitungsgleichungen

$$\begin{array}{llll}
\partial\varphi_1 = 0, & \partial\varphi_2 = 0, & \partial\varphi_3 = 0, \cdots, & \partial\varphi_m = 0\text{*)} \\
\partial^2\varphi_1 = 0, & \partial^2\varphi_2 = 0, & \partial^2\varphi_3 = 0, \cdots, & \partial^2\varphi_m = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\partial^n\varphi_1 = 0, & \partial^n\varphi_2 = 0, & \partial^n\varphi_3 = 0, \cdots, & \partial^n\varphi_m = 0.
\end{array}$$

3) Unter den $(m+2)\cdot n$ Ableitungen ∂x, ∂y, $\cdots$ ∂v, ∂w; $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\cdots$ $\partial^2 v$, $\partial^2 w$; $\cdots$ $\partial^n x$, $\partial^n y$, $\cdots$ $\partial^n v$, $\partial^n w$, welche in diesen mn Gleichungen in (2.) vorkommen, ist die unter ∂t verstandene $= 1$, so wie die unter $\partial^2 t$, $\partial^3 t$, $\cdots \partial^n t$ verstandenen $n-1$ Ableitungen $= 0$ sind. —

---

*) Diese Gleichungen der ersten Ordnung haben die Form

$$\begin{array}{l}
\partial(\varphi_1)_x \cdot \partial x + \partial(\varphi_1)_y \cdot \partial y + \cdots + \partial(\varphi_1)_v \cdot \partial v + \partial(\varphi_1)_w \cdot \partial w = 0 \\
\partial(\varphi_2)_x \cdot \partial x + \partial(\varphi_2)_y \cdot \partial y + \cdots + \partial(\varphi_2)_v \cdot \partial v + \partial(\varphi_2)_w \cdot \partial w = 0 \\
\vdots \\
\partial(\varphi_m)_x \cdot \partial x + \partial(\varphi_m)_y \cdot \partial y + \cdots + \partial(\varphi_m)_v \cdot \partial v + \partial(\varphi_m)_w \cdot \partial w = 0.
\end{array}$$

Und die Ableitungsgleichungen der höhern Ordnungen werden, den (§§. 63. 70. ꝛc. ꝛc.) gemäß, offenbar leicht in der ihnen eigenen Form hingestellt. Dabei ist noch zu bemerken daß t, so wie auch u, jedesmal einen völlig beliebigen der m+2 Veränderlichen (z. B. auch y) vorstellt, und daß alle bloßen ∂ (ohne Beisatz) nach dem durch t vorgestellten Veränderlichen genommen sind.

4) Diese mn Ableitungsgleichungen, welche $(m+2) \cdot n$ Ableitungen zu enthalten schienen, enthalten also in der That nur $(m+1)n$ Ableitungen, so daß $2n$ dieser Ableitungen, nämlich $\partial x, \partial^2 x, \cdots \partial^n x$, und $\partial y, \partial^2 y, \cdots \partial^n y$, in n der übrigen, nämlich in $\partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \cdots \partial^n u$ ausgedrückt werden können, weil man dazu nur $2n$ Gleichungen braucht, welche gerade übrig bleiben, nachdem aus den mn Ableitungsgleichungen die $(m-2) \cdot n$ Ableitungen der übrigen $m-2$ Veränderlichen (d. h. aller Veränderlichen außer x, y, t, u) eliminirt worden sind. Und da die m Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots \varphi_m = 0$, nach Elimination der $m-2$ übrigen Veränderlichen, ebenfalls noch 2 Gleichungen übrig lassen zwischen x, y, t, u, so kann auch noch x und y in t und in u ausgedrückt werden.

5) Setzt man aber diese Werthe statt $x, \partial x, \partial^2 x, \cdots \partial^n x$, $y, \partial y, \partial^2 y, \cdots \partial^n y$ in dem, (N. 1.) für F gefundenen Ausdruck F_1, so hat man den gesuchten Ausdruck F_2, welcher dem gegebenen F gleich ist, aber nur noch u, t, und die Ableitungen $\partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \cdots \partial^n u$ nach t, enthält.

6) Weil jedoch die (NN. 4. u. 5.) voraussetzen, daß t und u von x und y verschieden sind, so betrachte man noch die Fälle wo t entweder x oder y selbst vorstellt, oder wo u entweder x oder y selbst vorstellt, oder endlich wo t das y, und u das x vorstellt.

Ist aber t entweder x oder y selbst, so enthält F_1 nur die n Ableitungen $\partial y, \partial^2 y, \cdots \partial^n y$ (wenn $\partial x = 1$, $\partial^2 x = 0 = \partial^3 x =$ rc. $\cdots$) oder $\partial x, \partial^2 x, \cdots \partial^n x$ (wenn $\partial y = 1$, $\partial^2 y = 0 = \partial^3 y =$ rc.) Aus den obigen mn Ableitungsgleichungen müssen aber auch jetzt $(m-1)n$ Ableitungen eliminirt werden, weil x, y, t, u jetzt nur 3 Veränderliche sind; also bleiben jetzt auch nur n Gleichungen übrig, welche jedoch gerade wieder die in F_1 vorkommenden n Ableitungen in $\partial u, \partial^2 u, \cdots \partial^n u$ ausdrücken.

Ist $u = y$, und t von x und von y verschieden, so

hat man in F_1 schon ∂u, $\partial^2 u, \cdots \partial^n u$, aber auch noch ∂x, $\partial^2 x, \cdots \partial^n x$, welche letztere jedoch, wie oben gezeigt worden ist, gerade selber wieder in ∂u, $\partial^2 u, \cdots \partial^n u$, ausgedrückt werden können.

Und ist $u = x$ und zu gleicher Zeit $t = y$, so ist F_1 selbst schon der gesuchte Ausdruck F_2, weil dann ∂x, $\partial^2 x, \cdots \partial^n x$ nichts weiter als ∂u, $\partial^2 u, \cdots \partial^n u$ sind, während $\partial y = 1$, $\partial^2 y = 0$, $= \partial^3 y =$ ꝛc. ꝛc. ist.

7) Also findet man in allen Fällen eine Funktion F_2, wie solche verlangt wurde, welche nämlich der gegebenen Funktion F gleich ist, aber andere Ableitungen enthält, als F.

§. 82. Zusatz.

Enthält der Ausdruck F außer x, y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x, \cdots \partial^n y_x$, auch noch z_x, ∂z_x, $\partial^2 z_x$, ꝛc. ꝛc., so kann man, wenn alles übrige dasselbe bleibt wie im (§. 81.), nach denselben Prinzipien und mittelst derselben Ableitungsgleichungen, x, y, z, und alle in F vorkommenden Ableitungen von y und z nach x, in t, u, v und Ableitungen von u und v nach t ausgedrückt erhalten, und diese Ausdrücke in F substituiren; und man wird abermals F in F_2 verwandelt haben, in welchem bloß noch die letztern Veränderlichen und die letztern Ableitungen vorkommen, welcher aber dem gegebenen F gleich ist, so daß F in der Bedeutung nicht, sondern bloß in der Form eine Aenderung erlitten hat.

Man sehe Beispiel 5. in der Schlußanmerkung zu dieser Abtheilung.

Ueberhaupt könnte der Ausdruck F, wenn er noch mehr Veränderliche nebst ihren Ableitungen nach x enthielte, nun nach denselben Prinzipien jedesmal leicht in einen andern, ihm gleichen F_2 verwandelt werden, welcher statt der alten, eben so viele neue Veränderliche und Ableitungen aller übrigen der letztern, nach einem einzigen beliebigen derselben enthielte; während unter den neuen auch einige der alten mit verstanden werden können. Um aber nicht zu weitläufig zu werden, mag dieses hier theoretisch nicht

weiter verfolgt werden, weil das bisher vorgetragene ausreichen wird, den Anfänger für jeden einzelnen, in den Anwendungen vorkommenden Fall hinlänglich zu befähigen.

§. 83. Zusatz.

Wären die Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_m = 0$ nicht selbst gegeben gewesen, sondern sogleich und bloß ihre ersten Ableitungsgleichungen nach allem t, nämlich

$$\partial\varphi_1 = 0, \quad \partial\varphi_2 = 0, \quad \partial\varphi_3 = 0, \cdots, \partial\varphi_m = 0,$$

so würde man noch immer, gerade so wie oben gezeigt worden ist, die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, 2c., dadurch daß man vorher $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3}$, 2c. 2c. dafür setzt, in ∂u, $\partial^2 u$, 2c. (nach t), ausdrücken können, und es würden auch noch immer die Ausdrücke x, y, $\cdots$ w, v als Funktionen von t und u betrachtet werden können, wenn es auch schwerer werden dürfte diese Funktionen wirklich herzustellen,*) und zunächst unbestimmt bleiben muß, ob nicht jeder der Veränderlichen x, y, $\cdots$ w, v mehre von einander verschiedene Funktionen von t repräsentiren kann; in so ferne sie dasmal bloß gegebenen Ableitungsgleichungen zu genügen haben.

§. 84. Zusatz.

Betrachten wir noch einige besondere Fälle dieser Aufgabe.

1) Ist nämlich nur die einzige Gleichung $\varphi_{x,t} = 0$ gegeben und enthält der gegebene Ausdruck F nun außer x und y, bloß noch ∂y_x und $\partial^2 y_x$, so hat man aus $\varphi_{x,t} = 0$, noch

$$\partial\varphi = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial\varphi_x \cdot \partial x + \partial\varphi_t = 0;$$

---

*) In so ferne aus den gegebenen Ableitungsgleichungen $\partial\varphi_1 = 0$, $\partial\varphi_2 = 0, \cdots, \partial\varphi_m = 0$, erst durch Zurückleitungsrechnung (Integralrechnung) die Urgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots \varphi_m = 0$ gefunden werden müßten, was erst später gelehrt werden wird, aber auch dort noch vielen Schwierigkeiten unterworfen ist.

und $\partial^2\varphi = 0$, d. h.

$$\partial^2\varphi_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1}\varphi_{x,t} \cdot \partial x + \partial^2\varphi_t + \partial\varphi_x \cdot \partial^2 x = 0.$$

Findet man nun aus diesen 3 letztern Gleichungen x, ∂x und $\partial^2 x$, in y, t ausgedrückt, so kann man, nachdem aus F zuerst F_1 gebildet worden ist [welches x, y, ∂x, $\partial^2 x$, ∂y, $\partial^2 y$ (alle ∂ nach t genommen) enthält], diese Werthe statt x, ∂x, $\partial^2 x$ setzen und man wird F_2 haben, dem F gleich, aber bloß t, y, ∂y, $\partial^2 y$ (alle bloßen ∂ ohne Beisatz, nach t genommen) enthaltend.

2) Ist alles dasselbe, aber nicht $\varphi_{x,t} = 0$, sondern $\varphi_{y,t} = 0$ gegeben, so kann man aus F_1 bloß y, ∂y, $\partial^2 y$ wegschaffen, so daß F_2 noch t, x, ∂x, $\partial^2 x$ enthalten wird.

3) Ist weder $\varphi_{x,t} = 0$ noch $\varphi_{y,t} = 0$ gegeben, sondern $\varphi_{x,y,t} = 0$, so hat man noch

$\partial\varphi = 0$, d. h. $\partial\varphi_x \cdot \partial x + \partial\varphi_y \cdot \partial y + \partial\varphi_t = 0$;

und $\partial^2\varphi = 0$, d. h.

$$\partial^2\varphi_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1}\varphi_{x,y} \cdot \partial x \cdot \partial y + \partial^2\varphi_y \cdot \partial y^2 + 2\partial^{1,1}\varphi_{x,t} \cdot \partial x$$
$$+ 2\partial^{1,1}\varphi_{y,t} \cdot \partial y + \partial^2\varphi_t + \partial\varphi_x \cdot \partial^2 x + \partial\varphi_y \cdot \partial^2 y = 0.$$

Aus diesen 3 Gleichungen findet man nun sogleich x, ∂x, $\partial^2 x$ in t, y, ∂y, $\partial^2 y$ ausgedrückt; und diese Werthe in F_1 gesetzt, geben F_2, bloß t, y, ∂y, $\partial^2 y$ enthaltend.

Man kann aber auch aus diesen Gleichungen y, ∂y, $\partial^2 y$, in t, x, ∂x, $\partial^2 x$ ausdrücken, und hat dann F_2 bloß in t, x, ∂x, $\partial^2 x$ ausgedrückt, alle bloßen ∂ ohne Beisatz, nach t genommen verstanden.

4) Wäre weder $\varphi_{x,t} = 0$ noch $\varphi_{y,t} = 0$ noch $\varphi_{x,y,t} = 0$ gegeben, sondern $\varphi_{x,u} = 0$; und soll F_2 bloß y, u und ∂u_y, $\partial^2 u_y$, ꝛc. ꝛc. enthalten, so hat man hier, weil $t = y$ jetzt ist, in F_1 sogleich $\partial y = 1$, $\partial^2 y = 0$, so daß F_1 selbst schon nur noch x, y, ∂x, $\partial^2 x$, ꝛc. letztere ∂ nach t d. h. jetzt nach y genommen, enthält. — Aus $\varphi_{x,u} = 0$ folgt aber, nach allem y ableitend:

$$\partial\varphi_x \cdot \partial x + \partial\varphi_u \cdot \partial u = 0,$$

$$\partial^2\varphi_x \cdot \partial x^2 + 2\partial^{1,1}\varphi_{x,u} \cdot \partial x \cdot \partial u + \partial^2\varphi_u \cdot \partial u^2 + \partial\varphi_x \cdot \partial^2 x + \partial\varphi_u \cdot \partial^2 u = 0,$$

aus welchen 3 Gleichungen nun x, ∂x und $\partial^2 x$, in u, ∂u und $\partial^2 u$ ausgedrückt erhalten werden, so daß, wenn man diese in F_1 substituirt, sogleich F_2 hervorgeht, bloß y, u, ∂u, $\partial^2 u$ enthaltend, letztere Ableitungen, wie hier allemal, nach y genommen verstanden.

Beispiele. I. Wäre wiederum, wie im Beispiel zu (§. 61.)

$$F = A\cdot(x\cdot\partial y + y) - \frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y}$$

gegeben, wo y als Funktion von x gedacht und ∂y, $\partial^2 y$ statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ genommen sind, so daß man zunächst erhielte, nach (§. 61.):

$$F_1 = A\cdot\left(x\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + y\right) - \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x},$$

wo $F_1 = F$ ist und wo alle ∂ sich auf einen beliebigen neuen Veränderlichen beziehen; und hätte man die Gleichung

1) $x^2 + y^2 = t^2$

so folgt aus ihr, nach t ableitend,

2) $x\cdot\partial x + y\cdot\partial y = t$,

und nochmals nach allem t ableitend

3) $x\cdot\partial^2 x + y\cdot\partial^2 y + \partial x^2 + \partial y^2 = 1$;

aus welchen Gleichungen nun gefunden wird

4) $y = \sqrt{t^2 - x^2}$,

5) $\partial y = \frac{t - x\cdot\partial x}{\sqrt{t^2 - x^2}}$,

und 6) $\partial^2 y = -\frac{x^2 + t^2\cdot\partial x^2 - 2tx\cdot\partial x + x(t^2 - x^2)\cdot\partial^2 x}{(t^2 - x^2)\cdot\sqrt{t^2 - x^2}}$.

Werden nun diese Werthe statt y, ∂y, $\partial^2 y$, welche nach t genommen gedacht werden können, in F_1 substituirt, so erhält man

$$F_2 = A\cdot\frac{(t^2 - 2x^2)\cdot\partial x + tx}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \frac{(t^2 + t^2\cdot\partial x^2 - 2tx\cdot\partial x)^{\frac{3}{2}}}{x^2\cdot\partial x + t^2\cdot\partial x^3 - 2tx\cdot\partial x^2 + t(t^2 - x^2)\cdot\partial^2 x},$$

welcher Ausdruck zur Rechten der gesuchte F_2 ist, dem F gleich, aber nur noch x, t und Ableitungen von x nach t enthaltend.

II. Sollte aber, alles andere wie in (I.) vorausgesetzt, ein dem F gleicher Ausdruck gefunden werden, welcher bloß y, t und Ableitungen von y nach t enthält, so müßte man aus den Gleichungen (1. 2. 3) x, ∂x, $\partial^2 x$, in t, y, ∂y, $\partial^2 y$ ausgedrückt finden und in F_1 substituiren. Man erhielte dann

$$7)\quad x = \sqrt{t^2-y^2},$$

$$8)\quad \partial x = \frac{t-y\cdot\partial y}{\sqrt{t^2-y^2}},$$

$$9)\quad \partial^2 x = \frac{(1-y\cdot\partial^2 y-\partial y^2)(t^2-y^2)-(t-y\cdot\partial y)^2}{(t^2-y^2)\cdot\sqrt{t^2-y^2}};$$

und diese Werthe in F_1 substituirt, geben

$$F_2 = A\cdot\frac{(t^2-2y^2)\cdot\partial y+yt}{t-y\cdot\partial y} + \frac{(t^2+t^2\cdot\partial y^2-2ty\cdot\partial y)^{\frac{3}{2}}}{y^2\cdot\partial y+t^2\cdot\partial y^3-2ty\cdot\partial y^2+t(t^2-y^2)\cdot\partial^2 y},$$

welches der nun gesuchte Ausdruck F_2 ist, und in welchem alle ∂ nach t genommen sind.

III. Sollte endlich, alles andere wie in (I.) vorausgesetzt, der Ausdruck F_2 so gesucht werden, daß er dem F gleich ist, aber bloß y, t und die Ableitungen ∂t, $\partial^2 t$, ꝛc. nach y genommen enthält, so müßte man aus der gegebenen Gleichung (1.) oder

$$10)\quad x^2+y^2 = t^2,$$

alle Ableitungen nach y nehmend, zuerst finden

$$11)\quad x\cdot\partial x+y = t\cdot\partial t;$$

$$12)\quad x\cdot\partial^2 x+\partial x^2+1 = t\cdot\partial^2 t+\partial t^2;$$

daraus dann finden

$$13)\quad x = \sqrt{t^2-y^2},$$

$$14)\quad \partial x = \frac{t\cdot\partial t-y}{\sqrt{t^2-y^2}},$$

$$15)\quad \partial^2 x = \frac{(t^2-y^2)(t\cdot\partial^2 t+\partial t^2-1)-(t\cdot\partial t-y)^2}{(t^2-y^2)\cdot\sqrt{t^2-y^2}},$$

wo alle ∂ nach allem y genommen sind.

Nun muß man sich unter dem neuen Veränderlichen, nach welchem in F_1 die Ableitungen ∂x, $\partial^2 x$, ∂y, $\partial^2 y$, genommen sind, ebenfalls dieses y sich denken, so daß ∂y in 1, $\partial^2 y$ in 0, und

$$F_1 \quad\text{in}\quad A\cdot\left(\frac{x}{\partial x}+y\right)+\frac{(\partial x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x}$$

übergeht [vgl. Beispiel zu (§. 61.)], wo jetzt alle ∂ auf y sich beziehen. Setzt man dann hier statt x, ∂x, $\partial^2 x$, die eben in (13.—15.) gefundenen Werthe, so erhält man

$$F_2 = A \cdot \frac{t^2 - 2y^2 + ty \cdot \partial t}{t \cdot \partial t - y} + \frac{(t^2 \cdot \partial t^2 + t^2 - 2yt \cdot \partial t)^{\frac{3}{2}}}{t(t^2 - y^2) \cdot \partial^2 t - y^2 \cdot \partial t^2 - t^2 + 2yt \cdot \partial t},$$

welches jetzt der gesuchte Ausdruck F_2 ist, in welchem bloß y, t und Ableitungen von t nach y vorkommen, und welcher dem gegebenen Ausdruck F gleich ist.

IV. Wäre die Gleichung (1.) nämlich $x^2 + y^2 = t^2$ gar nicht, sondern dafür zwischen x, y und t bloß die Ableitungsgleichung

$$16)\quad \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2} = 1, \quad \text{oder} \quad \partial x^2 + \partial y^2 = 1$$

gegeben, so müßte man, sollte im übrigen die Aufgabe (I.) gegeben seyn, zuerst diese (16.) nach allem t ableiten, und erhielte

$$17)\quad \partial x \cdot \partial^2 x + \partial y \cdot \partial^2 y = 0;$$

dann müßte man aus (16. und 17.) ∂y, $\partial^2 y$ finden, nämlich

$$18)\quad \partial y = \sqrt{1 - \partial x^2}$$

$$19)\quad \partial^2 y = -\frac{\partial x \cdot \partial^2 x}{\sqrt{1 - \partial x^2}};$$

und diese Werthe in F_1 substituiren; und man würde erhalten

$$F_2 = A \cdot \left(x \cdot \frac{\sqrt{1 - \partial x^2}}{\partial x} + y\right) + \frac{\sqrt{1 - \partial x^2}}{\partial^2 x},$$

in welchem Ausdruck nur x, t und Ableitungen von x nach t vorkommen, aber auch noch y, weil, um solches ebenfalls in x und t ausdrücken und aus F_2 noch fortschaffen zu können, die dazu nöthige Urgleichung zwischen x, t und y fehlt, in so ferne nur die Ableitungsgleichung $\partial x_t^2 + \partial y_t^2 = 1$ dafür gegeben ist.*)

V. Wäre noch wie in (IV.) statt der (1.), diese andere Gleichung

$$20)\quad \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2} = 1, \quad \text{oder} \quad \partial x^2 + \partial y^2 = 1$$

gegeben, aber ein dem F in (I.) gleiches F_2 unter der Voraussetzung zu finden, daß in letzterem bloß t und Ableitungen von t nach y vor-

---

*) Wäre $A = 0$, also bloß $F = -\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$ gegeben gewesen, so wäre jetzt

$$F_2 = \frac{\sqrt{1 - \partial x^2}}{\partial^2 x}$$

geworden, worin bloß Ableitungen von x nach t vorkommen, und gar nichts mehr, was an y erinnern könnte.

kommen sollen, so muß man vor allem den Ausdruck in (20.) nämlich $\partial x_t^2 + \partial y_t^2$, in einen andern umformen, welcher Ableitungen von x, y und t nach einem beliebigen neuen Veränderlichen enthält, welches bekanntlich nach (§. 56.) dadurch geschieht, daß man $\frac{\partial x}{\partial t}$ statt ∂x_t, und $\frac{\partial y}{\partial t}$ statt ∂y_t setzt, so daß die Gleichung (20.) in

$$21)\quad \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial t \quad \text{oder} \quad \partial x^2 + \partial y^2 = \partial t^2$$

übergeht. Da nun hier y der neue Veränderliche seyn soll, nach welchem die Ableitungen vorkommen sollen, so hat man hier $\partial y = 1$, also die Gleichung (20. oder 21.) jetzt so gegeben

$$22)\quad \partial x^2 + 1 = \partial t^2,$$

woraus, noch einmal nach y die Ableitung nehmend,

$$23)\quad \partial x \cdot \partial^2 x = \partial t \cdot \partial^2 t \qquad \text{sich ergibt.}$$

Ferner reduzirt sich der Ausdruck F_1, weil jetzt die Ableitungen alle nach y genommen werden, wo $\partial y = 1$, $\partial^2 y = 0$ ist, auf

$$F_1 = A \cdot \left(\frac{x}{\partial x} + y\right) + \frac{(\partial x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x}.$$

Findet man daher aus (22.) und (23.) ∂x, $\partial^2 x$, in ∂t und $\partial^2 t$ ausgedrückt, nämlich

$$24)\quad \partial x = \sqrt{\partial t^2 - 1}$$

$$25)\quad \partial^2 x = \frac{\partial t \cdot \partial^2 t}{\sqrt{\partial t^2 - 1}},$$

und setzt man diese Werthe in vorstehendes F_1, so erhält man

$$F_2 = A \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{\partial t^2 - 1}} + y\right) + \frac{\partial t^2 \sqrt{\partial t^2 - 1}}{\partial^2 t},$$

welches der nun gesuchte Ausdruck F_2 ist, dem gegebenen F gleich, aber y, t und ∂t_y, $\partial^2 t_y$ nur enthaltend, in welchem jedoch auch noch x vorkommt, weil solches, einer mangelnden Urgleichung wegen, nicht in y und t ausgedrückt werden konnte.

Wäre aber $A = 0$, also

$$F = -\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}, \quad \text{demnach} \quad F_1 = -\frac{(\partial x_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x_y}$$

gegeben gewesen, so würde

$$F_2 = \frac{\partial t_y^2 \cdot \sqrt{\partial t_y^2 - 1}}{\partial^2 t_y}$$

geworden seyn, in welchem auch x nicht mehr vorkommen würde; welcher letztere Umstand jedoch nur der jetzt so einfachen Form von F selbst zuzuschreiben ist.

§. 85. Aufgabe.

Es ist z als eine Funktion von x und y betrachtet und ein Ausdruck F gegeben, welcher aus x, y, z, ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$, ꝛc. ꝛc. beliebig zusammengesetzt ist. Außerdem sind noch zwischen x, y, z und noch m neuen Veränderlichen v, s, ꝛc. ꝛc. ꝛc., m Gleichungen gegeben

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 0, \cdots, \varphi_m = 0.$$

Stellen nun t, w, u von den $m+3$ Veränderlichen x, y, z, v, s, ꝛc. ꝛc. drey beliebige vor, so soll man den Ausdruck F in einen ihm gleichen F_0 verwandeln, welcher letztere aber nur w, t, u und Ableitungen von u nach t und w (also ∂u_t, ∂u_w, $\partial^2 u_t$, $\partial^{1,1} u_{t,w}$, $\partial^2 u_w$ ꝛc. ꝛc.) enthält.

Auflösung.

1) Da vermöge der m Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots \varphi_m = 0$, und weil z schon eine Funktion von x und y ist, also noch eine ($m+1$te) Gleichung zwischen x, y, z vorhanden gedacht seyn muß, die $m+1$ übrigen Veränderlichen, also auch x und y, wiederum Funktionen der beiden t und w seyn müssen; so verwandle man zuerst nach (§§. 65. 68.) den Ausdruck F in einen andern F_1, welcher noch x, y, z, aber nicht mehr Ableitungen von z nach x und y, sondern dafür Ableitungen von x, y und z nach t und w hat.

2) Nimmt man nun zu den m Gleichungen

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 0, \cdots, \varphi_m = 0$$

noch die 2m Gleichungen der 1sten Ordnung

$$\partial(\varphi_1)_{(t)} = 0,\ \partial(\varphi_2)_{(t)} = 0, \cdots, \partial(\varphi_m)_{(t)} = 0$$

$$\partial(\varphi_1)_{(w)} = 0,\ \partial(\varphi_2)_{(w)} = 0, \cdots, \partial(\varphi_m)_{(w)} = 0,$$

so kann man von den $m+1$ Ableitungen

$$\partial x_t,\ \partial y_t,\ \partial z_t,\ \partial v_t,\ \partial s_t \cdots\cdot\ ^{*)}$$

und den $m+1$ Ableitungen

$$\partial x_w,\ \partial y_w,\ \partial z_w,\ \partial v_w,\ \partial s_w \cdots\cdot\ ^{**)}$$

die 2m übrigen (also auch die 6 Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t, ∂x_w, ∂y_w, ∂z_w) in die beiden ∂u_t, ∂u_w ausdrücken, während aus den m Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_m = 0$, auch noch x, y, z in w, t, u ausgedrückt werden können.

Setzt man aber diese eben gefundenen neuen Werthe in den (N. 1.) gefundenen Ausdruck F_1 statt x, y, z, ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t, ∂x_w, ∂y_w, ∂z_w, so enthält der neue Ausdruck F_2 diese nicht mehr, sondern dafür bereits u, t, w, ∂u_t, ∂u_w; dagegen noch die Ableitungen von x, y, z, nach t und w von der 2ten und höhern Ordnung.

3) Nimmt man aber noch die Ableitungsgleichungen der 2ten und höhern Ordnungen zu Hülfe, nämlich

$$\begin{aligned}
\partial^2(\varphi_1)_{(t)} &= 0, & \partial^2(\varphi_2)_{(t)} &= 0, \cdots, \partial^2(\varphi_m)_{(t)} &&= 0,\\
\partial^{1,1}(\varphi_1)_{(t),(w)} &= 0, & \partial^{1,1}(\varphi_2)_{(t),(w)} &= 0, \cdots, \partial^{1,1}(\varphi_m)_{(t),(w)} &&= 0,\\
\partial^2(\varphi_1)_{(w)} &= 0, & \partial^2(\varphi_2)_{(w)} &= 0, \cdots, \partial^2(\varphi_m)_{(w)} &&= 0;
\end{aligned}$$

u. s. w. f.; so hat man z. B. 3m Gleichungen der 2ten Ordnung, zwischen $3(m+1)$ Ableitungen der 2ten Ordnung nach t und w, folglich kann man in die 3 Ableitungen $\partial^2 u_t$, $\partial^{1,1}u_{t,w}$, $\partial^2 u_w$ alle die übrigen, namentlich aber $\partial^2 x_t$, $\partial^2 x_w$, $\partial^{1,1}x_{t,w}$, $\partial^2 y_t$, $\partial^2 y_w$, $\partial^{1,1}y_{t,w}$, $\partial^2 z_t$, $\partial^2 z_w$, $\partial^{1,1}z_{t,w}$, ausdrücken, und solche Werthe in F_2 statt der letztern substituiren.

Auf dieselbe Weise findet man aus den Ableitungsgleichungen der höhern Ordnungen, wie solche aus $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots\cdot$ $\varphi_m = 0$ hervorgehen, die höhern Ableitungen von x, y, z nach t und w, in Ableitungen von u nach t und w ausgedrückt,

---

*) Es sind $m+3$ Veränderliche, darunter t und w; also kommt ∂t_t, ∂w_t, und

**) hier, ∂w_w, ∂t_w, nicht vor.

und in u, t, w selbst, wenn man noch die in (Nro. 2.) bereits als aufgelöst erwähnten Gleichungen zu Hilfe nimmt.

Und so findet sich zuletzt der gesuchte Ausdruck F_0, dem gegebenen F gleich, aber bloß u, t, w, und Ableitungen von u nach t und w enthaltend. *)

§. 86. Zusatz.

Sind statt der Urgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_m = 0,$$

sie selbst nicht, sondern sogleich ihre Ableitungsgleichungen gegeben, der ersten Ordnung nach allem t und nach allem w, so findet natürlich die ganze Auflösung des (§. 84.) noch unverändert statt, nur daß man nun nicht auf bloß algebraischem Wege, x, y, z, in w, t, u ausdrücken könnte, sondern aus den gegebenen Ableitungsgleichungen erst zu den Urgleichungen zurückgehen müßte (mittelst der Zurückleitungsrechnung oder Integralrechnung, welche zur Zeit noch nicht gelehrt worden ist), um x, y, z selbst in w, t und u ausgedrückt zu haben.

§. 87. Zusatz.

Es ist nun nicht mehr schwer, ähnliche Wege zu betreten, wenn ein Ausdruck F beliebig viele Veränderliche und Ableitungen einer oder mehrer derselben Veränderlichen nach den übrigen genommen, bis zu einer beliebigen Ordnung enthält, und solcher Ausdruck F in einen andern F_0 verwandelt werden soll, welcher neue Veränderliche, und Ableitungen einer oder einiger dieser neuen Veränderlichen, nach den übrigen derselben neuen Veränderlichen, oder nach alten Veränderlichen genommen, enthalten, dem gegebenen Ausdruck F aber gleich seyn soll; es mögen noch

---

*) Die algebraische Auflösung aller Bestimmungsgleichungen, wird hier allemal als ausführbar vorausgesetzt, in so ferne in der Analysis jedesmal die Mittel herbeigeschafft werden müssen, welche die Auflösungen entweder wirklich geben, oder ersetzen.

so viele oder noch so wenige neue Gleichungen gegeben seyn, wenn nur die Aufgabe selbst möglich ist. — Deshalb mag diese Lehre hier nicht weiter verfolgt werden.

Schlußanmerkung.

Wir beschließen aber diese Abtheilung damit, in einigen Beispielen noch mehr den Nutzen und den Gebrauch der in diesen beiden erstern Abtheilungen gelehrten Umformung der Ableitungsausdrücke (gewöhnlich das **Uebertragen der Unabhängigkeit** genannt) nachzuweisen.

Beispiel 1. Hat man z. B. aus

$$y = a^x \quad \text{gefunden} \quad \partial y_x = a^x \cdot log\, a,$$

so gibt dies $F = 0$,

wenn $F = \partial y_x - a^x \cdot log\, a$

genommen wird. — Daraus kann man sich

$$F_1 = \frac{\partial y}{\partial x} - a^x \cdot log\, a$$

nach (§. 61.) verschaffen, und daraus wieder

$$F_2 = \frac{1}{\partial x_y} - a^x \cdot log\, a,$$

während $F_2 = F_1 = F = 0$ seyn muß, also daß man hat $F_2 = 0$, d. h.

$$\frac{1}{\partial x_y} - a^x \cdot log\, a = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial x_y = \frac{1}{a^x \cdot log\, a}$$

oder $\partial x_y = \frac{1}{y \cdot log\, a}$, während $x = \overset{a}{log}\, y = \frac{log\, y}{log\, a}$ ist.

Man konnte aber auch, sollte aus

$$1)\quad \partial y_x = a^x \cdot log\, a$$

gefunden werden ∂x_y, während

$$x_y = \overset{a}{log}\, y = \frac{log\, y}{log\, a} \text{ ist,}$$

bloß ∂y_x in (1.) unter F sich denken, solches in $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder F_1 verwandeln, und nun y als den neuen Veränderlichen ansehen, nach welchem die Ableitungen zu nehmen sind, und man bekam, weil nun $\partial y = 1$ ist, $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x, also aus (1.) jetzt

$$2)\quad \frac{1}{\partial x_y} = a^x \cdot log\, a = y \cdot log\, a$$

d. h. $$3)\quad \partial x_y = \frac{1}{y \cdot log\, a}.$$

Beispiel 2. Gesetzt es wäre gegeben

$$1)\quad z = Sin(x^2 + log\, y),$$

so hätte man

$$2)\quad \partial z_x = 2x \cdot Cos(x^2 + log\, y),$$

$$3)\quad \partial z_y = \frac{1}{y} \cdot Cos(x^2 + log\, y),$$

$$4)\quad \partial^2 z_x = 2 \cdot Cos(x^2 + log\, y) - 4x^2 \cdot Sin(x^2 + log\, y),$$

$$5)\quad \partial^{1,1} z_{x,y} = -\frac{2x}{y} \cdot Sin(x^2 + log\, y),$$

$$6)\quad \partial^2 z_y = -\frac{1}{y^2} \cdot Cos(x^2 + log\, y) - \frac{1}{y^2} \cdot Sin(x^2 + log\, y).$$

Sollte nun aus der Gleichung (1.) x in y und z ausgedrückt gedacht, und von diesem $x_{y,z}$ die Ableitungen nach y und z entwickelt hingestellt werden, ohne jedoch $x_{y,z}$ wirklich zu haben, so würde man nach (§. 69.), nach und nach einen jeden der Ausdrücke zur Linken in (2.—6.) statt F setzend, und indem hier z gesetzt wird, wo dort f steht, aus (2.—6.) vermöge (§. 67. N. N. 6.—10.) folgende Gleichungen erhalten, nämlich

$$7)\quad \frac{1}{\partial x_z} = 2x \cdot Cos(x^2 + log\, y),$$

$$8)\quad -\frac{\partial x_y}{\partial x_z} = \frac{1}{y} \cdot Cos(x^2 + log\, y),$$

$$9)\quad -\frac{\partial^2 x_z}{\partial x_z^3} = 2 \cdot Cos(x^2 + log\, y) - 4x^2 \cdot Sin(x^2 + log\, y),$$

$$10)\quad \frac{\partial^2 x_z \cdot \partial x_y - \partial x_z \cdot \partial^{1,1} x_{y,z}}{\partial x_z^3} = -\frac{2x}{y} \cdot Sin(x^2 + log\, y),$$

$$11)\quad \frac{-\partial^2 x_y \cdot \partial x_z^2 - \partial^2 x_z \cdot \partial x_y^2 + 2\partial^{1,1} x_{y,z} \cdot \partial x_y \cdot \partial x_z}{\partial x_z^3}$$

$$= -\frac{1}{y^2} \cdot [Cos(x^2 + log\, y) + Sin(x^2 + log\, y)],$$

aus welchen 5 Gleichungen nun ∂x_y, ∂x_z, $\partial^2 x_y$, $\partial^2 x_z$, $\partial^{1,1} x_{y,z}$ gefunden werden können, in x, y und z ausgedrückt, während man

zuletzt überall statt x seinen aus (1.) zu findenden, in y und z ausgedrückten Werth substituiren kann.

Und weil überall z statt $Sin(x^2 + log\, y)$ und $\frac{1}{2x \cdot \partial x_z}$ statt $Cos(x^2 + log\, y)$ gesetzt werden kann, so werden die 4 Gleichungen (8. — 11.) sich noch in folgende umformen:

$$12)\quad -\frac{\partial x_y}{\partial x_z} = \frac{1}{2xy \cdot \partial x_z}, \text{ oder } \partial x_y = -\frac{1}{2xy},$$

$$13)\quad \frac{\partial^2 x_z}{\partial x_z^3} = \frac{-1}{x \cdot \partial x_z} + 4x^2 \cdot z,$$

$$14)\quad \frac{\partial^2 x_z \cdot \partial x_y - \partial x_z \cdot \partial^{1,1} x_{y,z}}{\partial z_z^3} = -\frac{2xz}{y},$$

und

$$15)\quad \frac{-\partial^2 x_y \cdot \partial x_z^2 - \partial^2 x_z \cdot \partial x_y^2 + 2\partial^{1,1} x_{y,z} \cdot \partial x_y \cdot \partial x_z}{\partial x_z^3}$$

$$= -\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2x \cdot \partial x_z} + z\right),$$

woraus sich nun in Verbindung mit (7.) die gesuchten ∂x_z, ∂x_y, $\partial^2 x_z$, $\partial^2 x_y$, $\partial^{1,1} x_{y,z}$ noch bequemer ergeben.

Aus (1.) findet sich aber zuletzt noch

$$x = \sqrt{\frac{1}{Sin} z - log\, y} \text{ *)}.$$

Beispiel 3. Gesetzt man hätte die Gleichung

$$1)\quad a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2,$$

und aus ihr, zur Bestimmung von ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^2 z_y$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ die Ableitungsgleichungen gefunden

$$2)\quad a^2z \cdot \partial z_x + c^2x = 0,$$

$$3)\quad b^2z \cdot \partial z_y + c^2y = 0,$$

$$4)\quad a^2z \cdot \partial^2 z_x + a^2 \cdot \partial z_x^2 + c^2 = 0,$$

$$5)\quad z \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + \partial z_x \cdot \partial z_y = 0,$$

$$6)\quad b^2z \cdot \partial^2 z_y + b^2 \cdot \partial z_y^2 + c^2 = 0.$$

---

*) Wo man nicht vergessen muß, daß $\frac{1}{Sin} z$ statt arc. $Sin \cdot z$ oder statt arc. $(Sin = z)$ steht.

Gesetzt ferner man hätte die Gleichung (1.) ganz verloren, oder sie wäre gar nicht gegeben gewesen, sondern nur die aus ihr gewonnenen Ableitungsgleichungen (2.—6.); und doch wünschte man die Ableitungsgleichungen zu haben, aus denen die Ableitungen ∂x_y, ∂x_z, $\partial^2 x_y$, $\partial^2 x_z$, $\partial^{1,1} x_{y,z}$ gefunden werden könnten, während man $x_{y,z}$, wie sich solches durch Auflösung der unbekannten (nicht gegebenen, oder verloren gegangenen) Gleichung (1.) ergeben würde, selber nicht hat.

Um hier das Gewünschte zu haben, müßte man wiederum aus (§. 67. N. N. 6.—10.) z statt f setzend, die Werthe für ∂z_x, ∂z_y, $\partial^2 z_x$, $\partial^2 z_y$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ hier in (2.—6.) substituiren, um die Gleichungen zu haben, in denen nur noch ∂x_y, ∂x_z, $\partial^2 x_y$, $\partial^2 x_z$, $\partial^{1,1} x_{y,z}$ vorkommen, durch welche also diese 5 Ableitungen bestimmt und gegeben sind.

Beispiel 4. Hätte man die Funktion

$$F = A\cdot(x - y\cdot\partial^2 y_x) + \sqrt{1 + \partial y_x^2}$$

und die beiden Gleichungen

1) $(x-a)^2 + y^2 = u^2$,

2) $u\cdot Sin\, v = y$

gegeben, und sollte F in einen ihm gleichen Ausdruck F_0 umgewandelt werden, welcher bloß noch u, v und Ableitungen von u nach v enthält, so hätte man, $\frac{\partial y}{\partial x}$ statt ∂y_x, und $\frac{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x}{\partial x^3}$ statt $\partial^2 y_x$ setzend, sogleich F verwandelt in

$$F_1 = A\cdot\left(x - y\cdot\frac{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x}{\partial x^3}\right) + \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}},$$

wo alle Ableitungen nach einem beliebigen neuen Veränderlichen, also auch nach v genommen verstanden werden können. — Nimmt man nun von (1. und 2.) die Ableitungen nach allem v, so erhält man

3) $(x-a)\cdot\partial x + y\cdot\partial y = u\cdot\partial u$,

4) $Sin\, v\cdot\partial u + u\cdot Cos\, v = \partial y$,

5) $(x-a)\cdot\partial^2 x + \partial x^2 + y\cdot\partial^2 y + \partial y^2 = u\cdot\partial^2 u + \partial u^2$,

6) $Sin\, v\cdot\partial^2 u + 2\, Cos\, v\cdot\partial u - u\cdot Sin\, v = \partial^2 y$;

aus welchen Gleichungen nun x, y, ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ in u, v, ∂u, $\partial^2 u$ ausgedrückt gefunden und in F_1 substituirt werden können. Man findet aber:

7) $x = a \pm u \cdot Cos\, v$; 8) $y = u \cdot Sin\, v$;

9) $\partial x = \pm (Cos\, v \cdot \partial u - Sin\, v \cdot u)$; 10) $\partial y = Sin\, v \cdot \partial u + Cos\, v \cdot u$;

11) $\partial^2 x = \pm (Cos\, v \cdot \partial^2 u - 2 Sin\, v \cdot \partial u - Cos\, v \cdot u)$;

12) $\partial^2 y = Sin\, v \cdot \partial^2 u + 2 Cos\, v \cdot \partial u - Sin\, v \cdot u$. *)

Und setzt man diese Werthe in F_1, so erhält man

$$F_1 = A \cdot \left(a \pm u \cdot Cos\, v - \frac{u \cdot Sin\, v \cdot (u^2 + 2\partial u^2 - u \cdot \partial^2 u)}{(Cos\, v \cdot \partial u - Sin\, v \cdot u)^3} \right) \pm \frac{\sqrt{\partial u^2 + u^2}}{Cos\, v \cdot \partial u - Sin\, v \cdot u},$$

welcher Ausdruck zur Rechten der gesuchte Ausdruck F_2 ist, dem gegebenen F gleich, aber nur die neuen Veränderlichen u und v, und Ableitungen von u nach v enthaltend.

Beispiel 5. Es sey gegeben

$$F = \sqrt{1 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

wo y und z als Funktionen von x gedacht, und die Ableitungen nach x genommen sind; so hat man $\frac{\partial y}{\partial x}$ statt ∂y_x, und $\frac{\partial z}{\partial x}$ statt ∂z_x setzend

$$F = \frac{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}}{\partial x} = F_1,$$

wo alle ∂ auf einen neuen Veränderlichen sich beziehen, der noch beliebig gewählt werden kann. Hat man nun noch die Gleichungen

1) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

2) $z = r \cdot Sin\, u$,

3) $y = r \cdot Cos\, u \cdot Sin\, v$;

und soll F in einen andern, ihm gleichen Ausdruck verwandelt werden, welcher bloß r, u, v und Ableitungen von r und u nach v enthält, so muß man von (1. 2. 3.) die Ableitungen nach v nehmen, und findet

4) $x \cdot \partial x + y \cdot \partial y + z \cdot \partial z = r \cdot \partial r$;

---

*) Für das gegenwärtige Beispiel wäre es vortheilhafter gewesen, aus den Gleichungen (1. und 2.) sogleich

$$x = a \pm u \cdot Cos\, v,$$
$$y = u \cdot Sin\, v,$$

und dann aus der erstern ∂x, $\partial^2 x$, aus der andern aber ∂y, $\partial^2 y$ direkt nach (§. 41) zu finden.

5) $\partial z = Sin\,u \cdot \partial r + r \cdot Cos\,u \cdot \partial u$;

6) $\partial y = Cos\,u \cdot Sin\,v \cdot \partial r - r \cdot Sin\,u \cdot Sin\,v \cdot \partial u + r \cdot Cos\,u \cdot Cos\,v$.

Weil aber hier y, z, ∂y, ∂z bereits in r, u, v, ∂r, ∂u ausgedrückt sind, so thut man am besten, in (1.) die Werthe aus (2. und 3.) substituirend,

7) $x = \pm r \cdot Cos\,u \cdot Cos\,v$

zu finden, und daraus direkt nach (§. 41.):

8) $\partial x = \pm (Cos\,u \cdot Cos\,v \cdot \partial r - r\,Sin\,u \cdot Cos\,v \cdot \partial u - r \cdot Cos\,u \cdot Sin\,v)$

abzuleiten, statt solches ∂x aus der Gleichung (4.) erst auf algebraischem Wege zu finden. Substituirt man aber diese Werthe für ∂x, ∂y, ∂z in F_1, so erhält man

$$F_1 = \frac{\sqrt{\partial r^2 + r^2 \cdot \partial u^2 + r^2 \cdot Cos\,u^2}}{Cos\,u \cdot Cos\,v \cdot \partial r - r \cdot Sin\,u \cdot Cos\,v \cdot \partial u - r \cdot Cos\,u \cdot Sin\,v},$$

welcher Ausdruck zur Rechten der jetzt gesuchte F_2 ist.

Beispiel 6. Ist dagegen

$$F = \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}$$

gegeben, unter z eine Funktion von x und y gedacht, und hat man dieselben Gleichungen wie im (Beispiel 5. N. N. 1.—3.), so daß F in einen andern Ausdruck F_0 verwandelt werden soll, welcher bloß r, u, v und Ableitungen von r nach u und nach v enthält, so muß man vor allen Dingen, den (§§. 65. 68.) zufolge entwickeln

$$\partial z_{(u)} = \partial z_x \cdot \partial x_u + \partial z_y \cdot \partial y_u,$$

$$\partial z_{(v)} = \partial z_x \cdot \partial x_v + \partial z_y \cdot \partial y_v;$$

daraus finden

$$\partial z_x = \frac{\partial y_v \cdot \partial z_{(u)} - \partial y_u \cdot \partial z_{(v)}}{\partial y_v \cdot \partial x_u - \partial y_u \cdot \partial x_v};$$

$$\partial z_y = \frac{\partial x_u \cdot \partial z_{(v)} - \partial x_v \cdot \partial z_{(u)}}{\partial y_v \cdot \partial x_u - \partial y_u \cdot \partial x_v};$$

und solche Werthe statt ∂z_x, ∂z_y in F substituiren, und man erhält dann

$$F = F_1 = \frac{\sqrt{(\partial y_v \cdot \partial x_u - \partial y_u \cdot \partial x_v)^2 + (\partial y_v \cdot \partial z_u - \partial y_u \cdot \partial z_v)^2 + (\partial x_u \cdot \partial z_v - \partial x_v \cdot \partial z_u)^2}}{\partial y_v \cdot \partial x_u - \partial y_u \cdot \partial x_v},$$

welches der Ausdruck ist, der bloß Ableitungen nach den neuen Veränderlichen u und v enthält, und wo man ∂z_u, ∂z_v statt $\partial z_{(u)}$, $\partial z_{(v)}$ gesetzt hat, weil man unter ersteren dasselbe sich denken will,

was letztere bedeuten, d. h. man will mittelst der 3 Gleichungen (1.—3.) x, y und auch z als Funktionen von u und v (explizit, und implizit in r steckend) herstellen, und dann die Ableitungen nehmen nach allem u und nach allem v. — Nun sind aber die Gleichungen (1.—3.) identisch für jeden Werth von u und v, wenn man sich unter x, y, z diejenigen Funktionen von u und v (und r d. h. $r_{u,v}$) denkt, welche durch Auflösung derselben für x, y und z sich ergeben; — also erhält man, nach allem u und nach allem v die Ableitungen nehmend, aus (1.):

$$9)\quad x\cdot\partial x_u + y\cdot\partial y_u + z\cdot\partial z_u = r\cdot\partial r_u,$$

$$10)\quad x\cdot\partial x_v + y\cdot\partial y_v + z\cdot\partial z_v = r\cdot\partial r_v;$$

aus (2.):

$$11)\quad \partial z_u = Sin\,u\cdot\partial r_u + r\cdot Cos\,u,$$

$$12)\quad \partial z_v = Sin\,u\cdot\partial r_v,$$

und aus (3.):

$$13)\quad \partial y_u = Sin\,v\cdot Cos\,u\cdot\partial r_u - r\cdot Sin\,v\cdot Sin\,u,$$

$$14)\quad \partial y_v = Sin\,v\cdot Cos\,u\cdot\partial r_v + r\cdot Cos\,v\cdot Cos\,u;$$

und aus diesen Gleichungen kann man nun sogleich ∂x_u, ∂y_u, ∂z_u, ∂x_v, ∂y_v, ∂z_v, in r, u, v, ∂r_u, ∂r_v ausgedrückt erhalten und die Werthe dafür in F_1 substituiren, so daß der gesuchte Ausdruck F_0 sogleich sich ergibt.

Man erhält nämlich*)

$$15)\quad \partial x_u = \pm(Cos\,v\cdot Cos\,u\cdot\partial r_u - r\cdot Cos\,v\cdot Sin\,u),$$

$$16)\quad \partial x_v = \pm(Cos\,v\cdot Cos\,u\cdot\partial r_v - r\cdot Sin\,v\cdot Cos\,u);$$

während in (11.—14.) bereits ∂z_u, ∂z_v, ∂y_u, ∂y_v entwickelt stehen. — Und dann findet sich

$$F_1 = \frac{\sqrt{r^2\cdot Cos\,u^2 + Cos\,u^2\cdot\partial r_u^2 + \partial r_v^2}}{Cos\,u^2\cdot\partial r_u - r\cdot Sin\,u\cdot Cos\,u},$$

welcher Ausdruck zur Rechten der gesuchte F_0 ist.

Es darf übrigens wohl nicht noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daß dieses letztere Beispiel (6.) ein zu (§. 85.) gehöriges ist, während das Beispiel (5.) zu dem im (§. 82.) erwähnten, erweiterten Fall des (§. 81.) gehört.

---

*) Auch hier ist es bequemer, aus (1.—3.) sogleich direkt zu finden

$$x = \pm r\cdot Cos\,v\cdot Cos\,u,$$

und daraus dann direkt nach (§. 41.) ∂x_u und ∂x_v abzuleiten.

Dritte Abtheilung.

Die Lehren der beiden vorhergehenden Abtheilungen in der Form der Differenzialrechnung.

§. 88. Erklärung und Folgerung.

Bezeichnet man, wenn v in f implizit oder gemischt vorkommt, durch $d\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, $d^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, $d^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$ das erste, zweite, dritte, u. s. f. Differenzial von f, unter der Voraussetzung daß v um $d\mathrm{v}$, und alles was von v abhängig ist, um seinen dadurch bedingten Antheil (im Moment des Verschwindens gedacht) wächst, so hat man bekanntlich nach (§§. 18. 21.—23.)

$$1)\quad d\mathrm{f}_{(\mathrm{v})} = \partial\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}\cdot d\mathrm{v},\quad \text{oder}\quad \frac{d\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}}{d\mathrm{v}} = \partial\mathrm{f}_{(\mathrm{v})};$$

$$2)\quad d^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})} = \partial^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}\cdot d\mathrm{v}^2,\quad \text{oder}\quad \frac{d^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}}{d\mathrm{v}^2} = \partial^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})};$$

$$3)\quad d^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})} = \partial^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}\cdot d\mathrm{v}^3,\quad \text{oder}\quad \frac{d^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}}{d\mathrm{v}^3} = \partial^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})};$$

u. s. w. f.; während zu gleicher Zeit, wenn $d\mathrm{f}_\mathrm{x}$, $d^2\mathrm{f}_\mathrm{x}$, $d^3\mathrm{f}_\mathrm{x}$, ꝛc. die Differenzialien bedeuten, die dadurch entstehen, daß x in f bloß unmittelbar vorkommt und um ein, selbst nicht mehr abhängiges $d\mathrm{x}$ wächst,

$$4)\quad d\mathrm{f}_\mathrm{x} = \partial\mathrm{f}_\mathrm{x}\cdot d\mathrm{x},\quad \text{oder}\quad \frac{d\mathrm{f}_\mathrm{x}}{d\mathrm{x}} = \partial\mathrm{f}_\mathrm{x},$$

$$5)\quad d^2\mathrm{f}_\mathrm{x} = \partial^2\mathrm{f}_\mathrm{x}\cdot\partial\mathrm{x}^2,\quad \text{oder}\quad \frac{d^2\mathrm{f}_\mathrm{x}}{d\mathrm{x}^2} = \partial^2\mathrm{f}_\mathrm{x},$$

$$6)\quad d^3\mathrm{f}_\mathrm{x} = \partial^3\mathrm{f}_\mathrm{x}\cdot d\mathrm{x}^3,\quad \text{oder}\quad \frac{d^3\mathrm{f}_\mathrm{x}}{d\mathrm{x}^3} = \partial^3\mathrm{f}_\mathrm{x}$$

seyn muß. Und nach diesen Formeln kann man in allen den Fällen der (§§. 58.—87.) die dortigen Ableitungsausdrücke und Gleichungen sogleich in Differenzialausdrücke und Differenzial-Gleichungen umformen.

Anmerkung. Man muß jedoch nicht vergessen, daß die Zeichen $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$ ꝛc. schon nichts weiter ausdrücken, als beziehlich $\frac{df_x}{dx}$, $\frac{d^2f_x}{dx^2}$, $\frac{d^3f_x}{dx^3}$, ꝛc. d. h. beziehlich die Ableitungen ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. ꝛc.; den (§. 46.—§. 48.) zufolge.

§. 89. Zusatz.

Multiplizirt man daher die Gleichungen des (§. 58.), wo f eine Funktion von x, und x wiederum eine Funktion von v ist, beziehlich mit dv, dv^2, dv^3, ꝛc., so erhält man, weil auch noch nach (§§. 18. 21.—23.)

$$\partial x_v \cdot dv = dx, \quad \partial^2 x_v \cdot dv^2 = d^2 x \text{ u. s. w. f. ist:}$$

1) $df_{(v)} = \frac{df}{dx} \cdot dx;$

2) $d^2 f_{(v)} = \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot dx^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2 x;$

3) $d^3 f_{(v)} = \frac{d^3 f}{dx^3} \cdot dx^3 + 3 \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot dx \cdot d^2 x + \frac{df}{dx} \cdot d^3 x$

u. s. w. f.; während zu gleicher Zeit

1. 1) $df_x = \frac{df}{dx} \cdot dx;$

2. 2) $d^2 f_x = \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot dx^2;$

3. 3) $d^3 f_x = \frac{d^3 f}{dx^3} \cdot dx^3;$

u. s. w. f. ist.

Die gewöhnliche Differenzialrechnung unterscheidet aber nicht durch eine eigenthümliche Bezeichnung die Begriffe $df_{(v)}$ und df_x, $d^2 f_{(v)}$ und $d^2 f_x$, $d^3 f_{(v)}$ und $d^3 f_x$, u. s. f. sondern schreibt, die nach (§. 88.) unten angehängten (v) und x weglassend, für beides beziehlich bloß df, $d^2 f$, $d^3 f$, ꝛc., nennt sie auch ohne Unterschied Differenzialien von f, und unterscheidet sie bloß durch

die wörtliche Beifügung, „daß in ihnen dx entweder selbst wieder veränderlich, oder konstant sey.“ *)

Die Nummern (1.), wo dx veränderlich, und (1. 1.) wo dx konstant ist, unterscheiden sich aber dann nicht von einander, sondern fallen in die

$$\text{I.}\quad d\mathrm{f} = \frac{d\mathrm{f}}{dx}\cdot dx$$

zusammen. — Die Nummer (2.) dagegen wo dx veränderlich ist, wird

$$\text{II.}\quad d^2\mathrm{f} = \frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}\cdot dx^2 + \frac{d\mathrm{f}}{dx}\cdot d^2x,$$

während die (2. 2.) wo dx konstant ist, jetzt in

$$\text{II. 1.}\quad d^2\mathrm{f} = \frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}\cdot dx^2 \qquad \text{übergeht.}$$

Die Nummer (3.), wo dx veränderlich ist, wird ferner

$$\text{III.}\quad d^3\mathrm{f} = \frac{d^3\mathrm{f}}{dx^3}\cdot dx^3 + 3\frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}\cdot dx\cdot d^2x + \frac{d\mathrm{f}}{dx}\cdot d^3x;$$

während die (3. 3.), wo dx konstant ist, in

$$\text{III. 1.}\quad d^3\mathrm{f} = \frac{d^3\mathrm{f}}{dx^3}\cdot dx^3 \qquad \text{übergeht.}$$

U. s. w. f.

---

*) Diese Unterscheidung ist übrigens bezeichnend genug. — Ist nämlich dx veränderlich, so muß vorausgesetzt werden, daß x als Funktion von irgend einem neuen Veränderlichen v eine Aenderung dadurch erlitten hat, daß $v + dv$ statt v gesetzt worden; weil dann $dx, = \partial x_v \cdot dv$, eben weil ∂x_v wiederum Funktion von v ist, abermals eine Aenderung erleidet, sobald $v + dv$ statt v gesetzt wird. — Ist aber dx konstant, so ist die Aenderung dx nicht auf die eben beschriebene Weise hervorgebracht; sondern es ist dieser Zuwachs (obgleich, wie immer, im Moment des Verschwindens) dadurch entstanden, daß x unabhängig wächst; also ist jetzt x nicht mehr Funktion von v, und $d\mathrm{f}$, $d^2\mathrm{f}$, $d^3\mathrm{f}$, 2c. 2c., können sich jetzt bloß auf diese Voraussetzung beziehen.

Anmerkung. Man kann hier noch folgendes herausheben;

1) So lange bloß von Differenzialien der ersten Ordnung die Rede ist, so lange ist es ganz einerlei, ob man dx konstant oder veränderlich ansieht.

2) So wie aber von höheren Differenzialien d^2f, d^3f, ꝛc. die Rede ist, so muß man genau wissen, ob dx veränderlich oder konstant gedacht ist, d. h. ob diese d^2f, d^3f, ꝛc. ꝛc., die $d^2f_{(v)}$, $d^3f_{(v)}$ ꝛc. oder d^2f_x, d^3f_x, ꝛc. ꝛc. vorstellen, wenn man diese d^2f, d^3f, ꝛc. jedesmal in der rechten Bedeutung genommen haben will; weil nach den vorstehenden Formeln

$$d^2f_{(v)} = d^2f_x + \frac{df}{dx} \cdot d^2x,$$

$$d^3f_{(v)} = d^3f_x + 3\frac{d^2f}{dx^2}\,dx \cdot d^2x + \frac{df}{dx} \cdot d^3x$$

u. s. w. ist, und diese Gleichungen in

$$d^2f = d^2f + \frac{df}{dx} \cdot d^2x,$$

$$d^3f = d^3f + 3\frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx \cdot d^2x + \frac{df}{dx} \cdot d^3x,$$

u. s. w. übergehen, sobald man die Unterscheidungszeichen des (§. 88.) nicht mehr gebraucht; welche Form der Gleichungen offenbar die größte Verwirrung veranlaßen würde, wenn man nicht die Vorsicht gebrauchte, statt der df, d^2f, d^3f, zur Rechten (welche statt df_x, d^2f_x, d^3f_x ꝛc. des (§. 88.) stehen) die Ausdrücke

$$\frac{df}{dx} \cdot dx, \quad \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2, \quad \frac{d^3f}{dx^3} \cdot dx^3, \quad \text{ꝛc.}$$

zu setzen, wo dann in den Differenzialquotienten

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \text{ꝛc.}$$

die Bedeutungen der Zähler df, d^2f, d^3f, ꝛc. nicht mehr unbestimmt ist, weil man in den (§§. 46.—48.) ein für allemal

angenommen hat, daß diese Quotienten statt der Ableitungen ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, ꝛc. stehen, also daß in ihnen df, $d^2 f$, $d^3 f$, ꝛc. nach x (und nicht nach v) genommen sind, d. h. daß in diesen df, $d^2 f$, $d^3 f$, ꝛc. das Differenzial dx als konstant und nicht als veränderlich gedacht werden soll.

3) Man darf daher zur Rechten (in I. II. III. ꝛc. des §. 89.) statt der Ausdrücke $\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot dx^2$, $\frac{d^3 f}{dx^3} \cdot dx^3$, ꝛc. ꝛc. nie die ihnen gleichen $d^2 f$, $d^3 f$, ꝛc. setzen, (wie man z. B. statt $\frac{a}{b^2} \cdot b^2$, oder $\frac{a}{b^3} \cdot b^3$ bloß a setzt), weil dann diese $d^2 f$, $d^3 f$, ꝛc. welche $d^2 f_x$, $d^3 f_x$, ꝛc. vorstellen, von den $d^2 f$, $d^3 f$ ꝛc. zur Linken nicht mehr unterschieden werden könnten, welche letztere $d^2 f_{(v)}$, $d^3 f_{(v)}$, ꝛc. vorstellen.

4) Alle diese Vorsicht wäre aber nicht nöthig, wenn man in der Differenzialrechnung die (§. 88.) vorgeschlagene, der bei den Ableitungen analoge Bezeichnung der verschiedenen Differenzialien gebrauchen wollte.

5) Man kann auch die Gleichungen [I. II. III. ꝛc. des (§. 89.)] aus einander ableiten, sobald man die erste, nämlich

$$df = \frac{df}{dx} \cdot dx$$

hat, indem man links und rechts aufs neue (nach allem v, d. h. dx als veränderlich ansehend) differenziirt, und dabei ganz ein, dem des (§. 58.) selbst, analoges Verfahren eintreten läßt, die (§§. 49—51.) anwendend, nach welche die allgemeinen Gesetze des Ableitens der Summen und Differenzen, Produkte und Quotienten, u. s. w., überhaupt die allgemeinen Ableitungsregeln der (§§. 34.—36.) sogleich auch, der Form nach, für Differenziirungen gelten.

Man erhält dann aus

$$1)\quad df = \frac{df}{dx} \cdot dx,$$

zunächst $d^2f = d\left(\frac{df}{dx}\right) \times dx + \frac{df}{dx} \cdot d(dx)$, während nach derselben (1.), $\frac{df}{dx}$ statt f setzend: $d\frac{df}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx$ ist, so daß

$$2)\quad d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2 + \frac{df}{dx} \cdot d^2x$$

wird. — So wird auch d^3f, d^4f ꝛc. gefunden.

§. 90. Zusatz.

Umgekehrt kann man, analog dem (§. 59.), durch algebraische Auflösung der Gleichungen (1. 2. 3. ꝛc.) oder (I. II. III. ꝛc. des §. 89.) die zur Rechten stehenden Differenzialien df, d^2f, d^3f, ꝛc. in denen dx konstant gedacht ist, in die Differenzialien df, d^2f, d^3f, ꝛc. zur Linken, in welchen dx veränderlich genommen ist, und in die Differenzialien dx, d^2x, d^3x, ꝛc. ausdrücken; nur muß man, um die Bedeutung der df, d^2f, d^3f, ꝛc. nicht mit einander zu verwechseln, bei den erstern die Nenner stehen lassen, also die Differenzialquozienten $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3}$, ꝛc. ausdrücken, weil in ihnen die Bedeutung der Zähler df, d^2f, d^3f, ꝛc., der ein für allemal gemachten Annahme der (§§. 46.—48.) zufolge, sich nicht verkennen läßt.

Man findet dann

$$\text{I.}\quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx}, \quad \left(\text{d. h. } \frac{df_x}{dx} = \frac{df_{(v)}}{dx_v}\right);$$

$$\text{II.}\quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{dx \cdot d^2f - df \cdot d^2x}{dx^3};$$

$$\text{III.}\quad \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{dx^2 \cdot d^3f - 3dx \cdot d^2x \cdot d^2f + 3df \cdot d^2x^2 - dx \cdot df \cdot d^3x}{dx^5};$$

u. s. w. f.;

welche Gleichungen jedoch aus denen des (§. 59.) ebenfalls augenblicklich hervorgehen, wenn man Zähler und Nenner der dortigen Ausdrücke zur Rechten, beziehlich mit dv, dv^2, dv^3, ꝛc.

multiplizirt, und bemerkt daß $\partial x_v \cdot dv = dx$, $\partial^2 x_v \cdot dv^2 = d^2x$, $\partial^3 x_v \cdot dv^3 = d^3x$, ꝛc.; ferner $\partial f_{(v)} \cdot dv = df$, $\partial^2 f_{(v)} \cdot dv^2 = d^2f$, $\partial^3 f_{(v)} \cdot dv^3 = d^3f$, u. s. w. f. ist, unter diesen df, d^2f, d^3f, ꝛc. zur Rechten, diejenigen Differenzialien gedacht, in denen dx veränderlich genommen ist, d. h. die (§. 88.) durch $df_{(v)}$, $d^2f_{(v)}$, $d^3f_{(v)}$, ꝛc. bezeichneten.

§. 91. Zusatz.

Und nimmt man jetzt df konstant, (d. h. denkt man sich v in f übergehend, so daß x als eine Funktion von f eine Aenderung erleidet, dadurch daß f ganz unabhängig von irgend einer anderen Aenderung, in $f + df$ übergeht), so hat man $d^2f = 0$, $d^3f = 0$, u. s. w. f.; und die Gleichungen (I. II. III. ꝛc. des §. 90.) gehen jetzt in folgende über:

$$\text{I.}\quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} = 1 : \frac{dx}{df};$$

$$\text{II.}\quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{df \cdot d^2x}{dx^3};$$

$$\text{III.}\quad \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{3df \cdot d^2x^2 - df \cdot dx \cdot d^2x}{dx^5};$$

u. s. w. f.;

wo zur Linken die Differenzialien df, d^2f, d^3f, ꝛc. diejenigen sind, welche (§. 88.) durch df_x, d^2f_x, d^3f_x, ꝛc. bezeichnet worden, d. h. die Differenzialien von f, df, d^2f, ꝛc., welche man dadurch erhält, daß f als Funktion von x gedacht ist, und x um dx wächst, dabei aber dx konstant, d. h. von jedem andern ähnlichen Zuwachs dv nicht mehr abhängig gedacht ist, so daß $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, ꝛc. ist; während zur Rechten x als Funktion von f, dieses f um df unabhängig wachsend, und dann dx, d^2x, d^3x, ꝛc. die dazu gehörigen Differenzialien (nach f, d. h. dx_f, d^2x_f, d^3x_f, ꝛc. nach §. 88.) vorstellend, gedacht sind.

Diese Formeln gehen aber sogleich auch aus denen des (§. 60.) für denselben Fall gefundenen hervor, wenn man dort Zähler und Nenner zur Rechten beziehlich mit df, df^2, df^3, ꝛc. multiplizirt, und bemerkt, daß $\partial x_f \cdot df = dx_f = dx$, $\partial^2 x_f \cdot df^2 = d^2 x_f = d^2 x$, $\partial^3 x_f \cdot df^3 = d^3 x_f = d^3 x$, u. s. w. f. ist.

Anmerkung. So wie aber die Formeln der (§§. 59. und 60.) in den Anmerkungen zu den (§§. 59. und 60.) auch aus einander durch wiederholte Anwendung der erstern Formel (in jeder Parthie) entwikkelt worden sind, so kann man sie auch hier, einen ganz analogen Gang befolgend, aus einander herauswickeln.

So ist z. B. in (§. 90.)

$$1) \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} \left(\text{d. h. } \frac{df_x}{dx} = \frac{df_{(v)}}{dx_v}\right),$$

und hieraus dann sogleich, $\frac{df}{dx}$ statt f setzend,

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} \left(\text{d. h. } \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{df_{(v)}}{dx}\right)_{(v)}}{dx_v}\right),$$

während sogleich nach der Formel

$$d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z \cdot dy - y \cdot dz}{z^2},$$

$$d\left(\frac{df_{(v)}}{dx_v}\right) = \frac{dx \cdot d^2f - df \cdot d^2x}{dx^2},$$

also $\qquad 2) \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{dx \cdot d^2f - df \cdot d^2x}{dx^3}$

wird, rechts unter d^2f, das (§. 88.) bezeichnete $d^2f_{(v)}$ verstanden.

Und gerade so ließen sich auch die Formeln des (§. 91.) aus der ersten derselben d. h. aus

$$1) \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{df}\right)},$$

dieselbe wiederholt anwendend, mit Leichtigkeit ableiten. Setzt man nämlich in (1.) $\frac{df}{dx}$ statt f, so erhält man sogleich

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 1 : \frac{dx}{d\left(\frac{df}{dx}\right)} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}$$

wo zur Rechten $d\mathrm{f}$ konstant ist, so daß

$$d\left(\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}}\right) = -\frac{d\mathrm{f}\cdot d^2\mathrm{x}}{d\mathrm{x}^2}, \quad \text{also} \quad \frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^2} = -\frac{d\mathrm{f}\cdot d^2\mathrm{x}}{d\mathrm{x}^3}$$

wird; u. s. w. f.

§. 92. Zusatz.

Ist nun F eine Differenzialfunktion, welche aus x, f, dx, df, d^2f, d^3f, ꝛc. ꝛc. zusammengesetzt ist, unter der Voraussetzung, daß in d^2f, d^3f, ꝛc. das Differenzial dx als konstant angesehen ist (d. h. f als Funktion von x gedacht, und d^2f, d^3f, ꝛc. nach x genommen sind, also statt $d^2\mathrm{f}_\mathrm{x}$, $d^3\mathrm{f}_\mathrm{x}$, ꝛc. stehen), so wird man statt df, d^2f, d^3f, ꝛc. setzen $\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}}\cdot d\mathrm{x}$, $\frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^2}\cdot d\mathrm{x}^2$, $\frac{d^3\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^3}\cdot d\mathrm{x}^3$, ꝛc., um nun statt der Differenzialquotienten $\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^2}$, $\frac{d^3\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^3}$, ꝛc. die Ausdrücke aus (§. 90.) substituiren zu können, so daß dann F in einen andern Ausdruck F_1 verwandelt ist, welcher wiederum x, f, aber die Differenzialien dx, df, d^2x, d^2f, d^3x, d^3f, ꝛc. unter der Voraussetzung daß dx selbst wieder Veränderlich ist (d. h. daß f und x wiederum als Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen v gedacht sind), enthält.

Und setzt man in F statt $\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^2}$, $\frac{d^3\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^3}$, ꝛc. die Formeln des (§. 91.), so erhält man einen Ausdruck F_2, dem F gleich, welcher zwar noch x, f, dagegen df konstant, und in diesem Sinne nur noch dx, d^2x, d^3x, ꝛc. (d. h. $d\mathrm{x}_\mathrm{f}$, $d^2\mathrm{x}_\mathrm{f}$, $d^3\mathrm{x}_\mathrm{f}$, ꝛc. nach §. 88.) enthält.

Es sind aber auf diese Weise die dem (§. 61.) analogen Aufgaben hier gelöst.

Anmerkung. Gebrauchte man durchgehends in der Differenzialrechnung die (§. 88.) vorgeschlagenen Bezeichnungen, so würde man nicht nöthig haben in F statt der Differenzialien erst Differenzialquotienten sich zu bilden, weil letzteres nur geschieht, in so ferne den (§§. 46.—48.) zufolge in den Differenzialquotienten der Sinn ausge-

drückt ist, in welchem die jedesmaligen Differenzialien selbst genommen sind, und weil man deshalb schon gezwungen war, in den Formeln der (§§. 90. und 91.) links statt der zu findenden Differenzialien, lieber Differenzialquozienten stehen zu lassen.

§. 93. Aufgabe.

Es ist f eine Funktion zweier Veränderlichen x und y; man soll $d\mathrm{f}$, $d^2\mathrm{f}$, $d^3\mathrm{f}$, ꝛc. finden unter der Voraussetzung, daß $d\mathrm{x}$ und $d\mathrm{y}$ veränderlich seyn sollen.

Auflösung.

Da diese Voraussetzung nichts weiter heißt, als daß x und y selber wieder als Funktionen von v angesehen werden, und daß bloß v fortwährend um $d\mathrm{v}$ wachsen soll, so soll also, nach (§. 88.) wiederum $d\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, $d^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, $d^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, ꝛc. gefunden werden; und man erhält daher diese, wenn man die (§. 62.) bereits gefundenen Ableitungen $\partial\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, $\partial^2\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, $\partial^3\mathrm{f}_{(\mathrm{v})}$, ꝛc. ꝛc. noch beziehlich mit $d\mathrm{v}$, $d\mathrm{v}^2$, $d\mathrm{v}^3$, ꝛc. multiplizirt. Dies gibt

$$1)\quad d\mathrm{f} = \frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}}\cdot d\mathrm{x} + \frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{y}}\cdot d\mathrm{y};$$

$$2)\quad d^2\mathrm{f} = \frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{x}^2}\cdot d\mathrm{x}^2 + 2\frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{x}\cdot d\mathrm{y}}\cdot d\mathrm{x}\cdot d\mathrm{y} + \frac{d^2\mathrm{f}}{d\mathrm{y}^2}\cdot d\mathrm{y}^2 + \frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}}\cdot d^2\mathrm{x} + \frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{y}}\cdot d^2\mathrm{y},$$

u. s. w. f.;

wo jedoch die Formeln (2. 3. ꝛc.) auch aus der (1.) und aus einander, durch fortgesetzte Differenziirung, unter der Voraussetzung daß $d\mathrm{x}$, $d\mathrm{y}$ nicht konstant sind (d. h. nach allem v) gefunden werden können.

§. 94. Zusatz.

Soll $d\mathrm{f}$, $d^2\mathrm{f}$, $d^3\mathrm{f}$, ꝛc. unter der Voraussetzung gefunden werden, daß $d\mathrm{x}$ konstant ist (d. h. soll nach §. 88. $d\mathrm{f}_{(\mathrm{x})}$, $d^2\mathrm{f}_{(\mathrm{x})}$, $d^3\mathrm{f}_{(\mathrm{x})}$, ꝛc. gefunden werden), so muß man die Formeln des (§. 63.) noch beziehlich mit $d\mathrm{x}$, $d\mathrm{x}^2$, $d\mathrm{x}^3$, ꝛc. multipliziren; und man hat dann

1) $d\mathrm{f} = \frac{d\mathrm{f}}{dx}\cdot dx + \frac{d\mathrm{f}}{dy}\cdot dy$;

2) $d^2\mathrm{f} = \frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2\mathrm{f}}{dx\cdot dy}\cdot dx\cdot dy + \frac{d^2\mathrm{f}}{dy^2}\cdot dy^2 + \frac{d\mathrm{f}}{dy}\cdot d^2y$;

u. s. w. f.;

wo die Formeln (2. 3. ꝛc.) ebenfalls wieder aus (1.) und aus einander durch fortgesetzte Differenziirung (nach x, d. h. für dx konstant) abgeleitet werden können.

§. 95. Zusatz.

Ohne uns in fernere Wiederholungen einzulassen, reicht das bisher in dieser Abtheilung entwickelte aus, um folgende Wahrheiten zu erkennen:

1) So wie man früher Ableitungen nach x und nach v wohl von einander unterscheiden mußte, so muß man auch in der Differenzialrechnung Differenzialien nach x und nach v wohl von einander unterscheiden; und die erste, zweite, dritte ꝛc. Ableitung nach x, beziehlich mit dx, dx^2, dx^3, ꝛc. multiplizirt, gibt beziehlich das erste, zweite, dritte, ꝛc. Differenzial nach x, wie solche (§§. 18. 21.—23.) definirt worden sind; während die 1ste, 2te, 3te, ꝛc. Ableitung nach v, beziehlich mit dv, dv^2, dv^3, ꝛc. multiplizirt, beziehlich das 1ste, 2te, 3te, ꝛc. Differenzial nach v gibt.

2) Die gewöhnliche Differenzialrechnung unterscheidet die Differenzialien nach x und nach v, in der Bezeichnung nicht so von einander wie dies hier (§. 88.) vorgeschlagen worden ist, sondern höchstens dadurch, daß sie statt der Differenzialien nach x, setzet $\frac{d\mathrm{f}}{dx}\cdot dx$, $\frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}\cdot dx^2$, $\frac{d^3\mathrm{f}}{dx^3}\cdot dx^3$, ꝛc.; statt der Differenzialien nach v aber schreibt $\frac{d\mathrm{f}}{dv}\cdot dv$, $\frac{d^2\mathrm{f}}{dv^2}\cdot dv^2$, $\frac{d^3\mathrm{f}}{dv^3}\cdot dv^3$ ꝛc.; oder, wenn auch v in f explizit vorkommen sollte, während x ebenfalls v enthält, durch:

$$\frac{d(\mathrm{f})}{dv}\cdot dv,\quad \frac{d^2(\mathrm{f})}{dv^2}\cdot dv^2,\quad \frac{d^3(\mathrm{f})}{dv^3}\cdot dv^3,\ \text{ꝛc.}$$

weil dann nach (§§. 46.—51.)

$$\frac{df}{dv} \cdot dv, \quad \frac{d^2f}{dv^2} \cdot dv^2, \quad \frac{d^3f}{dv^3} \cdot dv^3, \text{ ꝛc.}$$

bloß die Differenzialien ausdrücken würde, welche man erhält, wenn bloß v, in so ferne es explizit vorkommt, nicht aber zugleich das v, was in f implizit vorkommt, um dv wachsend gedacht wird.*)

3) Setzt die Differenzialrechnung nicht Differenzialquotienten, an denen man den Sinn der in den Zählern vorkommenden Differenzialien erkennen kann, sondern setzt sie bloße Differenzialien, so muß sie jedesmal mit Worten noch hinzufügen, welches Differenzial (ob dv, oder dx, oder dy, ꝛc.) als konstant angesehen werden soll (d. h. nach welchem als unabhängig wachsend gedachten Veränderlichen die Differenzialien genommen werden sollen). Und sagt sie in einem Falle letzteres nicht bestimmt, so muß sie wenigstens mit Worten erklären, daß alle Differenzialien dx, dy, ꝛc. veränderlich gedacht sind, und dieses will dann nichts weiter bedeuten, als daß alle vorkommenden Veränderlichen wiederum als Funktionen eines und desselben, aber unbestimmt gelassenen und unabhängig wachsend gedachten Veränderlichen angesehen (also alle Differenzialien nach diesem letztern genommen) werden sollen.

4) Alle Paragraphen der Ableitungsrechnung (§. 58. bis §. 87.) lassen sich sogleich in Differenzialrechnung übertragen, wenn man die Ableitungen nach x, mit dx, dx^2, dx^3, ꝛc. oder die Ableitungen nach v, mit dv, dv^2, dv^3, ꝛc., multiplizirt

*) In der schon angeführten „Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin, 1825" hat der Verfasser die Bezeichnung

$$\frac{df}{\overline{\overline{dv}}} \cdot dv, \quad \frac{d^2f}{\overline{\overline{dv^2}}} \cdot dv^2, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

gebraucht, um anzudeuten, daß die Differenzialien nach allem v gefunden werden sollen. — Diese Bezeichnungsweise hat der Vfr. unterdessen einigemale bereits wiedergefunden, so daß sie nicht als unbequem angesehen worden zu seyn scheint.

(d. h. Zähler und Nenner eines Bruches, oder beide Seiten einer Gleichung, damit man aus richtigen Ableitungsgleichungen auch richtige Differenzialgleichungen erhalten möge). *)

5) In dem Geiste jener (§§. 58.—87.) arbeitend, jedoch überall Differenzialrechnung im Auge habend, kann man alle diese (§§.) sogleich auch direkt und ohne zuvor Ableitungsrechnung getrieben zu haben, (jedoch genau dieselben Wege verfolgend, nur alles in dieser neuen Form hinstellend), wie sie für die Differenzialrechnung statt finden, entwickeln und hinstellen. — Ja man kann sogar, durch dx, dx^2, dx^3, ꝛc. oder durch dy, dy^2, dy^3, ꝛc. dividirend, aus den Gleichungen zwischen Differenzialien sogleich Gleichungen zwischen Differenzialquozienten d. h. zwischen Ableitungen, mithin die Ableitungsrechnung wiederum aus der Differenzialrechnung erhalten.

6) Namentlich kann man sogleich was die (§§. 64. 73. bis 75. 80.) gelehrt haben, nämlich die Differenzialien verwickelt (durch Gleichungen) gegebener Funktionen zu finden, ohne gerade diese Funktionen erst (durch algebraische Auflösung dieser gegebenen Gleichungen) in entwickelter Form herstellen zu müssen, ohne weiteres in der Form der Differenzialrechnung hinstellen.

7) Und noch namentlich kann man gegebene Differenzialausdrücke F, in denen aber Differenzialien vorkommen, wo z. B. dx, oder dx und dy, oder u. s. w., als konstant angesehen worden sind (d. h. wo alles als Funktion von x, oder alles als

---

*) Wir empfehlen aber dem Anfänger, welcher die eigentliche Differenzialrechnung näher kennen lernen will, und sich in ihren Gang und in ihre Redensarten recht tüchtig hineinarbeiten, diese Uebertragung der (§§. 58.—87.) und namentlich auch der darunter vorkommenden Beispiele wirklich vorzunehmen. Besonders machen wir dabei auf das Beispiel (4. zu §. 74.) aufmerksam, wo die Differenzialien von y und x betrachtet werden unter der Voraussetzung, daß eine gegebene Funktion $\psi_{x,y}$ als konstant angesehen werden soll; ja wo zuweilen diese Funktion $\psi_{x,y}$ nicht selbst gegeben ist, sondern dafür bloß selber wieder die Differenzialgleichung z. B.

$$dx^2 + dy^2 = d\psi^2.$$

Funktion von x und y angesehen worden ist), in andere F_1 verwandeln, in denen irgend ein anderes Differenzial df, dt, oder zwei andere df und dt, u. s. w. als konstant angesehen worden sind (d. h. wo man alle Veränderlichen als Funktionen von f, oder von t, oder von f und t zugleich angesehen hat), während letzteres F_1 noch immer dem gegebenen F gleich seyn muß, so zwar daß, wenn $F = 0$ gegeben gewesen wäre, nun auch $F_1 = 0$ seyn müßte.

Diese den (§§. 61. 68. 69. ꝛc.) analogen Aufgaben enthalten aber das, was man in der Differenzialrechnung „das Uebertragen der Unabhängigkeit in den Differenzialfunktionen" (oder in den Differenzialgleichungen) nennt.

Wir wollen daher diese Lehren dadurch beschließen, daß wir noch einige der einfachsten und gewöhnlichsten Beispiele mittheilen.

Beispiel 1. Stellt y diejenige Funktion von x vor, welche die Gleichung

$$1)\quad y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$$

identisch macht für jeden Werth von x, (also auch für $x + dx$ statt x) so ist auch jedes Differenzial von $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2$ (nach allem x, oder nach allem y), $= 0$, also

$$2)\quad y \cdot dy - mx \cdot dy - my \cdot dx + x \cdot dx = 0,$$

welche in
$$y \cdot \partial y - mx \cdot \partial y - my + x = 0$$
übergeht, wenn man durch dx dividirt, und ∂y statt ∂y_x d. h. statt $\frac{dy}{dx}$ setzt; welche aber in

$$y - mx - my \cdot \partial x + x \cdot \partial x = 0$$

übergeht, wenn man (2.) durch dy dividirt, und ∂x statt ∂x_y d. h. statt $\frac{dx}{dy}$ setzt.

Differenziirt man aber jedes Glied in (2.), folglich den ganzen Ausdruck (2.), wiederum nach allem x (d. h. dx als konstant ansehend), so erhält man

$$3)\quad y \cdot d^2y + dy^2 - 2m \cdot dx \cdot dy - mx \cdot d^2y + dx^2 = 0,$$

welche, wenn man durch dx^2 dividirt, in

$$y \cdot \partial^2 y + \partial y^2 - 2m \cdot \partial y - mx \cdot \partial^2 y + 1 = 0$$

übergeht, unter ∂y, $\partial^2 y$ die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$ verstanden.

Differenziirt man aber die Gleichung (2.) nach allem y (d. h. dy als konstant ansehend), so ergibt sich

4) $dy^2 - 2m \cdot dx \cdot dy - my \cdot d^2x + dx^2 + x \cdot d^2x = 0$,

welche, wenn man durch dy^2 wegdividirt in

$$1 - 2m \cdot \partial x_y - my \cdot \partial^2 x_y + \partial x_y^2 + x \cdot \partial^2 x_y = 0$$

übergeht.

Differenziirt man endlich die Gleichung (2.) indem man sowohl dx als dy veränderlich ansieht, (d. h. denkt man sich x und y, also auch dx, dy als Funktionen von v, welche die Gleichung (2.) für jedes v, also auch für $v + dv$ statt v, identisch machen, und das Differenzial nach allem v genommen), so erhält man:

5) $y \cdot d^2y + dy^2 - mx \cdot d^2y - 2m \cdot dx \cdot dy - my \cdot d^2x + x \cdot d^2x + dx^2 = 0.$

Setzt man in (5.) $d^2x = 0$, so erhält man die (3.); und für $d^2y = 0$ ergibt sich die (4.), wie solches seyn muß, weil $d^2x = 0$, dx als konstant, und $d^2y = 0$, dy als konstant voraussetzt.

Setzt man in (3.) $\frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^3}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, so ergibt sich

$$(y - mx) \cdot \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx} + dy^2 + dx^2 - 2m \cdot dx \cdot dy = 0,$$

oder

6) $(y - mx) \cdot d^2y - (y - mx)\frac{dy}{dx} \cdot d^2x + dy^2 + dx^2 - 2m \cdot dx \cdot dy = 0$,

wo dx und dy veränderlich sind, (d. h. wo alle Differenzialien nach v genommen sind) wie in (N. 5.).

Und findet man aus (2.)

$$(y - mx)\frac{dy}{dx} = my - x;$$

und setzt man diesen Werth in (6.), so geht die Gleichung (6.) genau in die (5.) über.

Beispiel 2. Um das Beispiel (1.) noch mehr in die Augen fallen zu lassen, bezeichne man den Ausdruck

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 \quad \text{durch} \quad f,$$

y als eine beliebige Funktion von x sich denkend, sowohl jede andere, welche f nicht zu Null macht, oder auch die bestimmte, welche gerade diesen Ausdruck f zu Null macht. Und man hat nun

1) $f = y^2 - 2mxy + x^2 - a^2$;

2) $df = 2y \cdot dy - 2mx \cdot dy - 2my \cdot dx + 2x \cdot dx$;

3) $d^2f = 2y \cdot d^2y - 2mx \cdot dy + 2dy^2 - 4m \cdot dx \cdot dy + 2dx^2$;

wo dx als konstant angesehen ist.

Ist nun y diejenige Funktion von x, welche f zu Null macht, so hat man vorstehende f, df und d^2f, jedes für sich, = 0, und dies sind die Gleichungen (1. 2. 3.) des vorhergehenden Beispiels.

Betrachtet man, ohne daß gerade f = 0 ist, dy als konstant, so bleiben (1. 2.) wie vorher, dagegen wird statt (3.) jetzt aus (2.)

4) $d^2f = 2dy^2 - 4m \cdot dx \cdot dy + 2dx^2 - 2(my - x) \cdot d^2x$.

Der Ausdruck in (4.) zur Rechten ist ein anderer als der (3.) zur Rechten; aber auch das Zeichen d^2f zur Linken in (4.) hat eine ganz andere Bedeutung (es bedeutet nämlich $d^2f_{(y)}$ d. h. $\partial^2 f_{(y)} \cdot dy^2$ oder $\frac{d^2f}{dy^2} \cdot dy^2$ oder $\frac{d^2(f)}{dy^2} \cdot dy^2$) als das Zeichen d^2f in (3.), (welches statt $\partial^2 f_{(x)} \cdot dx^2$ oder $d^2f_{(x)}$ oder $\frac{d^2(f)}{dx^2} \cdot dx^2$ oder $\frac{d^2f}{dx^2} \cdot dx^2$ steht).

Bedeutet aber x diejenige Funktion von y, welche f zu Null macht, so ist auch df in (2.) und d^2f in (4.), jedes für sich, = 0; und dies sind die Gleichungen (1.) (2.) und (4.) des Beispiels (1.).

Ist weder dx noch dy konstant, so bleibt (1. und 2.) wie oben, aber statt der (3.) oder statt der (4.) erhält man jetzt aus (2.), nochmals differenziirend,

5) $d^2f = 2(y - mx) \cdot d^2y - 2(my - x) \cdot d^2x + 2dy^2 + 2dx^2 - 4m dx \cdot dy$,

wo das jetzige d^2f von den beiden vorigen verschieden ist und jetzt statt $d^2f_{(v)}$ d. h. statt $\partial^2 f_{(v)} \cdot dv^2$ oder $\frac{d^2f}{dv^2} \cdot dv^2$ steht, so daß also

α) das jetzige d^2f, $= \frac{d^2(f)}{dx^2} \cdot dx^2 + \frac{d(f)}{dx} \cdot d^2x$,

oder auch

β) das jetzige d^2f, $= \frac{d^2(f)}{dy^2} \cdot dy^2 + \frac{d(f)}{dy} \cdot d^2y$ ist.

Um sich von dieser letztern Behauptung auch a posteriori zu überzeugen, nehme man d^2f aus (N. 3.), welches $\frac{d^2(f)}{dx^2} \cdot dx^2$ ist, setze

aber, weil das dortige d^2y statt $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx^2$ steht, jetzt

$\frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^3}\cdot dx^2$ dafür, so erhält man

$$2(y-mx)\frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx} + 2dy^2 - 4m\cdot dx\cdot dy + 2dx^2;$$

und addirt man dazu noch $\frac{d(f)}{dx}\cdot d^2x$, wie solches aus (2.) zu finden ist, nämlich:

$$\left[2(y-mx)\frac{dy}{dx} - 2(my-x)\right]\cdot d^2x,$$

so erhält man wirklich das d^2f in der (N. 5.), wie (α.) solches behauptet, und wie der frühern Theorie zufolge, behauptet werden mußte.

Und nimmt man d^2f aus (4.), welches $\frac{d^2(f)}{dy^2}\cdot dy^2$ ist, in ihm für d^2x, in welchem dy konstant ist, jetzt den ihm gleichen Ausdruck

$$\frac{dy\cdot d^2x - dx\cdot d^2y}{dy^3}\cdot dy^2,$$

in welchem dy und dx zugleich veränderlich gedacht sind, setzend; nimmt man also

$$2dy^2 - 4m\cdot dx\cdot dy + 2dx^2 - 2(my-x)\cdot\frac{dy\cdot d^2x - dx\cdot d^2y}{dy};$$

und addirt man dazu noch

$$\frac{d(f)}{dy}\cdot d^2y \quad \text{d. h.} \quad \left[2(y-mx) - 2(my-x)\frac{dx}{dy}\right]\cdot d^2y,$$

wie solches aus (2.) sogleich hervorgeht, so erhält man abermals den Ausdruck (5.), wie solches (β.) behauptet hat.

Und sind x und y solche Funktionen von v (also auch y eine solche Funktion von x, oder x eine solche Funktion von y), welche f zu Null machen, so ist auch

$$\frac{d(f)}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d(f)}{dy} = 0$$

und deshalb aus (α.) und (β.), jetzt

γ) d^2f in (5.), $=$ d^2f in (3.)

δ) d^2f in (5.), $=$ d^2f in (4.)

und jedes $= 0$, wenn man nur in (3.) $\frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^3}\cdot dx^2$ statt d^2y, und in (4.) $\frac{dy\cdot d^2x - dx\cdot d^2y}{dy^3}\cdot dy^2$ statt d^2x substituirt, damit dy und dx zugleich veränderlich genommen sind, wie

dies in (5.) seyn muß. Daher erhält man dann die Gleichung (6.) des vorhergehenden Beispiels, aus welcher deshalb die Gleichung (5.) desselben Beispiels wiederum hervorgehen muß.

Und immer dienen diese Gleichungen (1. 2. 3.) oder (1. 2. 4.) des vorhergehenden Beispiels dazu, die Differenzialien dy, d^2y, so wie auch y, in x und dx; oder die Differenzialien dx, d^2x, so wie auch x, in y und dy auszudrücken; während die Gleichungen (1. 2. und 5.) oder (1. 2. und 6.) desselben Beispiels dazu dienen y, dy, d^2y in x, dx, d^2x auszudrücken, in so ferne jetzt x und y als Funktionen von v gedacht sind, welche $f = 0$ machen, und dieses v um dv wachsend gedacht ist, weshalb nicht bloß x um dx, y um dy, sondern auch dx um d^2x, dy um d^2y wächst.

Beispiel 3. Um dieses Beispiel noch anschaulicher und instruktiver zu machen betrachte man f als eine beliebige Funktion von x und y, in welcher wieder y eine Funktion von x, also auch x eine Funktion von y ist, oder auch x und y zugleich als Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen v betrachtet werden können, so hat man

1) $f \;= f$

2) $df \;= \frac{df}{dx}\cdot dx + \frac{df}{dy}\cdot dy$

3) $d^2f \;= \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot dxdy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2 + \frac{df}{dy}\cdot d^2y$,

wo dx konstant gedacht, d. h. y als eine Funktion von x, und dieses x unabhängig um dx wachsend gedacht ist, so daß d^2f links in (3.) statt $d^2f_{(x)}$ oder statt $\partial^2 f_{(x)}\cdot dx^2$ oder statt $\frac{d^2(f)}{dx^2}dx^2$, oder statt $\frac{d^2f}{\overline{\overline{dx^2}}}\cdot dx^2$ steht.

Aber eben so erhält man aus (2.), wenn man dy als konstant ansieht,

4) $d^2f = \frac{df}{dx}\cdot d^2x + \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot dxdy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2$,

wo links d^2f statt $d^2f_{(y)}$ oder statt $\frac{d^2(f)}{dy^2}\cdot dy^2$ oder statt $\frac{d^2f}{\overline{\overline{dy^2}}}\cdot dy^2$ oder statt $\partial^2 f_{(y)}\cdot dy^2$ steht, x als eine Funktion von y angesehen, und dieses y unabhängig um dy wachsend gedacht.

Und nimmt man weder dx noch dy konstant, so erhält man aus (2.) wenn noch einmal differenziirt wird (jetzt nach allem v)

5) $d^2f =$

$$\frac{df}{dx}\cdot d^2x + \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dx\cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2 + \frac{df}{dy}\cdot d^2y,$$

wo v um dv und dadurch x um dx, y um dy, dx um d^2x, dy um d^2y, und df um d^2f wachsend gedacht ist.

Setzt man in (5.) $d^2x = 0$, also dx konstant, so geht (3.) hervor, so wie wenn in (5.) $d^2y = 0$ d. h. dy konstant genommen wird, nothwendig (4.) hervorgehen muß.

Setzt man aber in (3.) statt d^2y jetzt $\frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^3}\cdot dx^2$, so ergibt sich

$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2}\cdot dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dx\cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2 + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx}$$

d. h.

6) $$d^2f = -\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot d^2x + \frac{d^2f}{dx^2}d^2x + 2\cdot\frac{d^2f}{dx\cdot dy}\cdot dx\cdot dy + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot dy^2 + \frac{df}{dy}\cdot d^2y$$

in welchem Ausdruck auf der rechten Seite d^2x, d^2y nach v genommen sind, während d^2f zur Linken noch dasselbe in (3.) stehende ist, d. h. statt $\frac{d^2(f)}{dx^2}\cdot dx^2$ oder $\frac{d^2f}{\overline{\overline{dx^2}}}\cdot dx^2$ oder $\partial^2 f_{(x)}\cdot dx^2$ oder $d^2f_{(x)}$ steht.

Weil aber

$$d^2f \text{ in } (5.) = d^2f \text{ in } (3. \text{ oder } 6.) + \frac{d(f)}{dx}\cdot d^2x \text{ ist,}$$

so erhält man d^2f in (5.) auch aus d^2f in (6.), wenn man zu letzterem noch $\frac{d(f)}{dx}\cdot d^2x$ oder $\frac{df}{\overline{\overline{dx}}}\cdot d^2x$ wie solches aus (2.) hervorgeht, nämlich

$$7)\quad \left[\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\cdot d^2x$$

addirt; wie auch solches a posteriori die Rechnung selbst bestätigt.

Ist aber y diejenige Funktion von x, (also auch x diejenige Funktion von y, und sind demnach x und y diejenigen Funktionen von v), welche f zu Null machen, so ist $f = 0$, $df = 0$ also auch der Ausdruck in (7.) $= 0$, mithin jeder der beiden Ausdrücke in (5.) und

in (6.) für sich $= 0$, so wie auch $d^2 f$ in (3.) $= 0$, und $d^2 f$ in (4.) $= 0$; und es dient dann die Gleichung, welche aus (6.) hervorgeht, so gut zur Bestimmung von $d^2 y$ in $d^2 x$, als die aus (5.) hervorgehende, weswegen auch die erstere wieder in letztere übergeht, wenn man aus $df = 0$, $-\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$ findet, und diesen Werth in (6.) statt des mit $d^2 x$ multiplizirten $-\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ substituirt.

Dieses alles ist aber nichts anderes als was im Beispiel (1.) schon gesagt ist, hier allgemeiner und dadurch übersichtlicher gestellt.

Beispiel 4. Es sey gegeben

$$1)\quad F = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2 y},$$

wo y als Funktion von x gedacht und dx als konstant angesehen ist; man soll dieses F in einen andern ihm gleichen Ausdruck F_1 verwandeln, welcher $d^2 y$ und $d^2 x$ enthält (nach v) unter der Voraussetzung daß dx und dy zugleich veränderlich sind.

Man setzt nur

$$\frac{dx \cdot d^2 y - dy \cdot d^2 x}{dx^3} \cdot dx^2$$

statt $d^2 y$ in F und man erhält

$$2)\quad F = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2 y - dy \cdot d^2 x},$$

welcher Ausdruck zur Rechten der gesuchte F_1 ist.

Und setzt man hier $d^2 y = 0$, also dy konstant, so ergibt sich

$$3)\quad F = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy \cdot d^2 x} = F_2,$$

welcher Ausdruck zur Rechten durch F_2 bezeichnet seyn mag, dem F gleich ist, aber $d^2 x$ (nach y) unter der Voraussetzung enthält, daß dy konstant ist.

Denselben F_2 hätte man auch direkt erhalten, wenn $\frac{-dy \cdot d^2 x}{dx^3}$ statt $d^2 y$ in F gesetzt worden wäre.

Wäre noch gegeben zwischen x, y und t die Gleichung

$$4)\quad x^2 + y^2 = t^2,$$

und nun F in einen andern Ausdruck zu verwandeln, in welchem dy, $d^2 y$ gar nicht, sondern bloß dx, $d^2 x$, vorkommen, dt aber als kon-

stant angesehen ist (d. h. wo dx_t, d^2x_t der Bezeichnung des (§. 88.) zufolge nur vorkommt), so erhält man, (4.) differenziirend, in diesem Sinne

$$5)\quad x \cdot dx + y \cdot dy = t \cdot dt,$$

$$6)\quad x \cdot d^2x + y \cdot d^2y + dx^2 + dy^2 = dt^2,$$

aus welchen Gleichungen dy, d^2y gefunden und in (2.) substituirt werden; und der Ausdruck F wird in den gesuchten übergehen.

Wäre aber statt der Gleichung (4.) lieber die Gleichung

$$7)\quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt \quad \text{oder} \quad dx^2 + dy^2 = dt^2$$

gegeben gewesen, so hätte man, diese in dem angezeigten Sinne differenziirend,

$$8)\quad dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y = 0$$

gefunden; aus (7. und 8.) dy und d^2y entwickelt und diese Werthe in (2.) substituirt, und dann erhalten

$$9)\quad F = + \frac{dt \cdot dy}{d^2x} = \frac{dt \cdot \sqrt{dt^2 - dx^2}}{d^2x},$$

wo dt konstant ist, d. h. wo die Differenzialien nach t genommen sind, und welcher Ausdruck zur Rechten jetzt der gesuchte ist.

Sollte aber unter den letztern Voraussetzungen nicht d^2x, sondern lieber d^2y vorkommen, so fände sich noch

$$10)\quad F = - \frac{dt \cdot dx}{d^2y} = - \frac{dt \cdot \sqrt{dt^2 - dy^2}}{d^2y}.$$

Schluß-Anmerkung.

Wir müssen aber dem Anfänger wiederholt in Erinnerung bringen, daß demselben zu rathen seyn dürfte, alles über Differenzialrechnung Gesagte vorerst zu übergehen und sich bloß mit der Ableitungsrechnung recht vertraut zu machen, weil aus letzterer die erstere augenblicklich hervorgeht, während die mangelhafte Bezeichnung der Differenzialrechnung, wie sie gewöhnlich statt findet, und der Widerspruch, welcher in der Definition des Differenzials selbst liegt, für den Anfänger zwei wesentliche Hindernisse sind, welche das leichte und sichere Fortschreiten in diesen Rechnungen gleichmäßig aufhalten, oder doch erschweren und verzögern.

Gedruckt bei den Gebr. Unger,
Markgrafenstraße Nr. 51.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 3

Berlin 1829

Math.u. 144 k-3/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594166-5